

1909.

MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

N. 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GRÜN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 30. HEFT 2.

DER GANZEN REIHE 385. BANDEN 2. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1909.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

(Ausgegeben am 14. Oktober 1909.)

Inhalt.

	Seite
1. K. Potzger. Die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop	185
2. M. Laue. Zur Thermodynamik der Gitterbeugung	225
3. Stanislav Loria. Quantitative Bestimmung der anomalen Dispersion des Lichtes in gesättigtem nicht leuchtendem Natriumdampfe von der Temperatur 385° C.	240
4. A. Werner und H. Gohdes. Über die Abhängigkeit des Dauer- und Momentanprozesses einer getrennten Phosphoreszenzbande vom Metallgehalt und über die Erregungsverteilungen dieser beiden Prozesse	257
5. Kurt Wolz. Die Bestimmung von e/m_0 . (Hierzu Taf. I, Figg. 1—6, Taf. II, Fig. 7 und sieben Aufnahmen)	278
6. Victor Quittner. Untersuchungen über die magnetischen Eigenschaften von Magnetitkristallen.	289
7. Günther Bode. Das Verhalten des Eises im ultraroten Spektrum	326
8. Hans Witte. Über die Bjerknessche hydrodynamische Analogie zu den elektrischen Erscheinungen	337
9. W. Wien. Über positive Strahlen. Zweite Abhandlung	349
10. M. La Rosa. Über das wahrscheinliche Schmelzen des Kohlenstoffs im selbsttönenden Lichtbogen und im Funken	369
11. A. Wassmuth. Über den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen und der kanonischen Form der Zustandsgleichung	381
12. Karl Schmitt. Über die innere Reibung einiger Gase und Gasgemische bei verschiedenen Temperaturen	393
13. F. Haber und G. Just. Austritt negativer Elektronen aus reagierenden Metallen	411
14. S. J. Barnett. Bemerkung zu Hrn L. Baumgardts Angaben bezüglich der Möglichkeit eines entscheidenden Experiments über unipolare Induktion	416

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

ta
55
25

10

67

3

19

26

7

9

9

1

6

1

6

n
n
e

n
u

it
as
n
a-

l-
st
t.
n
l-
n
u

G
de
lie
vo
is
er
w
W
B
lie
na
ke
in
sp
U
de
na
vo
ei
pl
ge
ge
h
so

w
ve
de

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 30.

1. *Die Beugungserscheinungen
im Ultramikroskop;
von K. Potzger.*

Einleitung.

Wenn man unter dem Ultramikroskop Teilchen, z. B. Goldteilchen im Zsigmondyschen Goldrubinglas, beobachtet, deren Dimension jenseits der Auflösungsgrenze des Mikroskops liegt, so erblickt man um die hellste mittlere Partie ein System von Interferenzringen, deren Aussehen mitunter so fremdartig ist, daß es sich nicht auf bisher genauer untersuchte Beugungserscheinungen zurückführen läßt. Man muß sich dabei klar werden, daß das Teilchen selbst wegen seiner weit unter der Wellenlänge des Lichtes liegenden Größe keinen Anlaß zu Beugungserscheinungen geben kann. Aber auch die gewöhnliche Fraunhofersche Beugungserscheinung, wie man sie bei natürlichen oder künstlichen Sternen im Fernrohr sehen kann, kommen hier nicht in Frage, denn die Helligkeitsverteilung in den Ringen, welche außen oft viel heller sind als innen, spricht gegen eine solche Erklärung. Ferner erblickt man im Ultramikroskop zwei ganz verschiedene Ringsysteme, von denen das eine (Ringsystem I) nach innen, das andere (Ringsystem II) nach außen wandert, wenn man den Abstand des Teilchens von der Frontlinse des Objektivs verkleinert. Es ist dies eine Erscheinung, wie man sie bei gewöhnlichen Beugungsphänomenen nicht beobachten kann. Besonders von mir angestellte Versuche haben ergeben, daß man das Gesichtsfeld ganz bedeutend einschränken muß, um eine normale Fraunhofersche Beugungserscheinung zu erhalten. Woher aber sollen dann diese Interferenzringe kommen?

Hr. Prof. Wiener schlug mir zufolge einer ihm gesprächsweise von Prof. Bruns gewordenen Anregung vor, näher zu verfolgen, ob durch die Deformation der Wellenfläche infolge der Brechung an den Kugelflächen der Linsen die Erscheinungen

in ähnlicher Weise zustande kommen können, wie die sogenannten überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen. Bekanntlich wird eine ebene Lichtwelle durch Brechung und Reflexion an einer Kugel zu einer sehr verwickelten Wellenoberfläche verzerrt, deren Schnitte Wendepunkte aufweisen. Es hat Mascart¹⁾ nachgewiesen, daß die von Airy²⁾ genau untersuchten Beugungserscheinungen in einfacher Weise zustande gekommen gedacht werden können durch die Interferenz der Wellen, welche von den Polen der Wellenlinie ausgehen. Unter diesen Polen hat man sich die Fußpunkte der von einem im Unendlichen gelegenen Beschauungspunkte auf die Wellenfläche gefällten Normalen zu denken.

Wollte man diese Frage entscheiden, so war es, um unübersehbare Rechnungen zu vermeiden, vor allem nötig, die Zahl der brechenden Flächen möglichst zu beschränken. Es gelang mir, sie auf eine einzige Kugelfläche zu reduzieren, welche die Erscheinungen genau so zeigte, wie ein zusammengesetztes System. Zu diesem Zwecke wurde als Linse eine Halbkugel aus Glas vom gleichen Brechungsindex wie das Zsigmondysche Goldrubinglas benutzt und der Zwischenraum zwischen den beiden Gläsern von einer Flüssigkeit vom gleichen Brechungsindex ausgefüllt. Auf diese Art hatte die Welle, welche von dem leuchtenden Teilchen ausging, nur die einzige Brechung an der Kugelfläche der Linse zu erleiden. Die Rechnung ergibt nun, daß die Wellenoberfläche nach der Brechung keine vollständig konvexe Fläche ist, sondern in der Mitte eine Vertiefung besitzt, wodurch deren Hauptschnitte zwei Wendetangenten und für eine der Linsenachse benachbarte Richtung drei Pole erhalten. Die genauere Durchführung der Berechnung der Interferenzringe nach Vorgang von Mascart, wie wenn sie durch Wellen entstünden, die von jenen drei Polen ausgehen, ergab in der Tat die Lage der Interferenzen mit einer solchen Genauigkeit, wie man sie nicht anders erwarten durfte. Man muß sich dabei klar werden, daß die Mascartsche Methode nur eine Näherungsmethode

1) E. Mascart, *Traité d'Optique* 1. p. 398 ff. 1889; 3. p. 493 ff. (1893).

2) G. B. Airy, *Transact. of the Cambridge Phil. Soc.* 8. p. 379. 1839; *Pogg. Ann., Erg.-Bd.*, p. 232. 1842.

darstellt, die besonders in der Mitte der Erscheinung zu keinem genauen Ergebnis führt. Da aber die genaue Durchführung nach dem Huyghensschen Prinzip zu außerordentlich mühsamen Rechnungen führt, deren Arbeit in keinem Verhältnis zu der Wichtigkeit des Ergebnisses gestanden hätte, so habe ich auf diese genaue Methode verzichtet. Ich betrachtete meine Aufgabe als erledigt, nachdem ich nachgewiesen hatte, daß die Verzerrung der Wellenoberfläche die merkwürdigen Interferenzerscheinungen erzeugt. Für eine über das erreichte Maß hinausgehende Genauigkeit lagen vorderhand weder theoretische noch praktische Gründe vor.

Obleich somit das vorliegende Phänomen als dem Regenbogenphänomen verwandt nachgewiesen wurde, so glaube ich doch, daß es zum mindesten beim ersten Anblick erstaunlich erscheint, daß die Beugungserscheinungen, die wie hier aus Übereinanderdeckung von zweierlei Systemen zustande gekommen erscheinen, bereits durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche erzeugt werden. Die Auffassung der Übereinanderdeckung zweier Interferenzerscheinungen ist dabei zudem berechtigt, da sie ja nach der Mascartschen Anschauung nicht durch zwei, sondern im vorliegenden Falle durch drei Wellen veranlaßt werden.

I. Teil.

Vergleich der im Ultramikroskop auftretenden und der Fraunhofersehen Beugungserscheinungen.

1. Untersuchung über die Einstellung auf die geometrische Abbildungsebene.

Die erste praktische Frage, welche uns bei der Untersuchung der Erscheinungen entgegnet ist die: Welches Bild erblickt man, wenn man das Mikroskop scharf auf die geometrische Abbildungsebene des Teilchens einstellt? Um diese Frage zu beantworten, bediente ich mich zweier Methoden.

Zunächst ritzte ich mit einem Diamanten in ein Zsigmondysches Goldrubinglas einen äußerst feinen, mit unbewaffnetem Auge kaum sichtbaren Strich ein und brachte das Präparat wenig geneigt unter das Objektiv. Das von der Seite einfallende Licht konnte bei dieser Anordnung nicht ins Objektiv gelangen, wohl aber das Licht, welches der Ritz

diffus zerstreute. Nachdem ich bei durchfallendem Lichte scharf eingestellt hatte, beleuchtete ich von der Seite her, wie es bei der Aufstellung des Ultramikroskops erforderlich ist. Da jetzt das Gesichtsfeld dunkel war, wurde die Erscheinung glänzender. Man sah wohl noch den scharfen Strich, aber er zerfiel in lauter kleine Scheibchen, die von einem dunklen und einem hellen Ringe umgeben waren. Verkleinerte ich den Abstand des Striches von der Linse, so wurde der Strich dadurch verwischt, daß sich um jedes Scheibchen neue Ringe lagerten.

Da ich aber noch nicht schließen durfte, daß der Strich aus ultramikroskopischen Pünktchen bestand, so suchte ich diese Methode noch einwandfreier zu machen, indem ich in die Ebene des Ritzes ultramikroskopische Teilchen brachte. Zu diesem Zwecke ritzte ich auf ein gewöhnliches Glas einen Strich ein, brachte darauf eine schwache Lösung von kolloidalem Eisenoxydhydrat und ließ das Wasser verdunsten. Jetzt mußten sich in der Ebene des Ritzes tatsächlich ultramikroskopische Teilchen befinden. Als ich nun das angefertigte Präparat wie vorher das Goldrubinglas montiert und ebenso wie vorher auf den Ritz eingestellt hatte, beobachtete ich bei seitlicher Beleuchtung den scharfen Strich, der über das ganze Gesichtsfeld hinweg von einer großen Zahl ultramikroskopischer Eisenoxyhydratteilchen umgeben war. Jedes dieser Teilchen zeigte ein inneres helles Scheibchen, das von zwei dunklen und einem hellen Ring umgeben war. Diese zweite Methode war auch noch insofern günstiger als die erste, als sie die Messung der Durchmesser der umgebenden Maxima und Minima gestattete. Das Resultat, das sich aus diesen Untersuchungen ergab, ist folgendes: *Die scharfe Einstellung auf die geometrische Abbildungsebene des Teilchens ist dann erreicht, wenn sich um das innerste helle Scheibchen noch ein weiteres Maximum lagert.*

2. Vergleich der Fraunhoferschen und der im Ultramikroskop auftretenden Beugungserscheinungen.

Da das I. Ringsystem mit den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen Ähnlichkeit besitzt, so vermutete ich zunächst, daß diese Ringe durch Beugung an den Blenden des Objektivs herrührten. Um diese Vermutung zu prüfen, berechnete ich

die Durchmesser der Ringe, die bei der Fraunhoferschen Anordnung durch Beugung an Kreisblenden auftreten, und maß die Ringe, wie sie im Ultramikroskop zustande kommen.

Um diese beiden Erscheinungen vergleichen zu können, war es notwendig, die ultramikroskopische Beobachtung so einzurichten, daß sie der Fraunhoferschen Anordnung entspricht, d. h. es muß auf die Blende eine *ebene oder sphärische Welle* einfallen und die Beobachtung muß im Unendlichen stattfinden. Dies läßt sich dadurch erreichen, daß man das leuchtende Teilchen in den Brennpunkt des Objektivs bringt, hinter dem Objektiv eine Blende befestigt und im Unendlichen beobachtet. Um diese Anordnung zu verwirklichen, verlängerte ich den Tubus des Mikroskops durch eine Röhre von ungefähr 900 mm Länge, die man sich als unendlich denken kann. Stellt man nun auf das Teilchen scharf ein, so hat man die Fraunhofersche Anordnung vor sich. Auf den verlängerten Mikroskoptubus wurde dann ein Okular mit einem durch Mikrometer verstellbaren Fadenkreuz aufgesetzt, mit dem man auf $\frac{1}{100}$ mm ablesen konnte. Der Abstand der geometrischen Abbildungsebene von der



A = Fadenkreuz.

B = Blende.

$\overline{AB} = 1058 \text{ mm}$ (ist genügend unendlich).

$2R$ = Durchmesser der Blende
= 9,68 mm (gemessen mit dem Komparator von Zeiss).

Fig. 1.

Blende wurde mit Hilfe eines Kathetometers auf 1 mm genau bestimmt, was einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Proz. entspricht. Die Fig. 1 gibt die Versuchsanordnung schematisch an.

Zunächst stellte ich wie vorher schon auf das Glaspräparat mit dem Strich und den Eisenoxydhydratteilchen ein. Es zeigte sich dabei, daß die Erscheinung dieselbe war, wie bei dem Ultramikroskop in normaler Benutzung. Da die Ringe aber ziemlich lichtschwach waren, so benutzte ich für die ge-

naunen Messungen ein Goldrubinglas und erzielte damit bedeutend größere Intensitäten. Um vor allem zu zeigen, daß die Durchmesser der Ringe nur abhängig waren von den Dimensionen des Objektivs und nicht etwa von der Größe der Teilchen, führte ich die Messungen an sehr kleinen und sehr großen Teilchen aus, die man an den bedeutenden Intensitätsunterschieden erkannte. Was für Teilchen ich auch nahm, stets ergaben sich die gleichen Durchmesser der Ringe. Es wurden 50 verschiedene Ringe gemessen und jeder Durchmesser 20 mal bestimmt. Ausgeführt wurden die Messungen bei gelbem Licht von einer Wellenlänge von ungefähr $589 \mu\mu$. Die Werte dieser Messungen sind in der Tab. 1 zusammengestellt.

Für die Berechnung der Minima bei der Fraunhofer'schen Beugung an Kreisblenden gelten die Gleichungen¹⁾

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2R} \cdot 1,220,$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\lambda}{2R} \cdot 2,233,$$

wobei φ_1 und φ_2 die Winkelhalbmesser der Minima, λ die Wellenlänge des Lichtes und R den Radius der Blende bedeutet. Um Experiment und Theorie vergleichen zu können, muß man diese Gleichungen so umformen, daß in ihnen anstatt der Winkelhalbmesser die wirklichen Durchmesser d_1 und d_2 vorkommen. Da φ_1 und φ_2 sehr kleine Winkel sind, so kann man \sin durch \tan ersetzen und man erhält sofort:

$$d_1 = \frac{2 \cdot [A B] \cdot \lambda \cdot 1,220}{2R},$$

$$d_2 = \frac{2 \cdot [A B] \cdot \lambda \cdot 2,233}{2R}.$$

Tabelle I.

	beobachtet	berechnet
d_1	$0,34 \pm 0,01$	0,16
d_2	$0,62 \pm 0,01$	0,29

1) A. Winkelmann, Handbuch d. Physik 6, 2. p. 1074.

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß die beobachteten und die berechneten Durchmesser durchaus verschieden sind. Die Abweichungen, die über 100 Proz. betragen, sind so groß, daß sie sich weder aus den Beobachtungsfehlern noch aus falschen Werten für die Wellenlänge des Lichtes erklären lassen. Allerdings wäre es denkbar, daß nicht die benutzte Blende, sondern die Fassung der Linse die wirksame Blende ist. Doch auch dieser Einwand ist hinfällig, da die Strahlen, die die Fassung treffen, infolge Totalreflexion an der Kugellinse nicht durchs Objektiv gehen und die eingesetzte Blende einen Teil der Strahlen abblendet, die durch das Objektiv hindurchgehen. Die auftretenden Beugungserscheinungen können also mit den Fraunhoferschen nicht identisch sein.

Bevor nun aber eine Erklärung dafür gegeben wird, soll zunächst untersucht werden, welchen Einfluß eine Veränderung der Blendengröße auf die Beugung im Ultramikroskop hat.

3. Einfluß der Blendengröße auf die Beugung im Ultramikroskop.

Um zu untersuchen, in welcher Weise sich die Ringe im Ultramikroskop beim Verkleinern der Blenden verändern, stellte ich mir eine Anzahl kreisrunder und rechteckiger Blenden von verschiedenen Größen her und setzte in *B* (Fig. 1) nach und nach immer kleinere und kleinere Blenden ein. Dabei zeigte sich, daß sich an den Durchmessern der Ringe zunächst nicht das geringste änderte, bis sie bei einer bestimmten Blendengröße ganz plötzlich sich vergrößerten und mit den aus der Theorie berechneten übereinzustimmen begannen. So waren die Ringdurchmesser bei einem Blendendurchmesser von 4,52 mm noch die gleichen wie vorher, während bei 4,09 mm die Ringe die Werte annahmen, wie sie die Tab. 2 angibt.

Tabelle 2.

	beobachtet	berechnet
d_1	$0,40 \pm 0,01$	0,37
d_2	$0,71 \pm 0,01$	0,67

Die jetzt auftretenden Abweichungen sind nur noch gering. Die Übereinstimmung nimmt sogar noch zu, wenn man noch kleinere Blenden einsetzt.

Eine weitere wichtige Tatsache ergab sich noch bei diesen Versuchen. Waren die Blendendurchmesser groß, so zeigte sich bei Verkleinerung des Abstandes des leuchtenden Teilchens vom Objektiv das Ringsystem II, während es bei kleinen Blenden wegblieb. Die ganze Erscheinung verschwand nach und nach. Noch augenfälliger wurde das Verhalten der Beugungserscheinung beim Einsetzen der Rechtecksbenden. Bei großen Rechtecken zeigte sich wohl eine Verzerrung der Ringe, aber der Ringtypus blieb bestehen und es trat nicht die Beugungsfigur des Rechteckes auf. Dies wurde anders, wenn man kleine Rechtecke als Blenden benutzte. Man erhielt dann in der Tat das Beugungsbild des Rechteckes.

Aus allen diesen Versuchen geht hervor, daß die Blenden erst bei genügender Kleinheit Einfluß auf die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop haben, daß sie also keineswegs die ausschlaggebenden Faktoren für das Zustandekommen der Interferenzringe sind.

II. Teil.

Mathematische Entwicklungen.

Da wir gesehen haben, daß die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop in erster Linie nicht durch die Blenden im Objektiv bedingt sind, so soll der bereits in der Einleitung angedeutete Gedanke weiter durchgeführt werden, indem die Beugung durch eine deformierte Wellenoberfläche erzeugt gedacht wird. Es ergibt sich dann der Gang der Untersuchung wie folgt.

Wir nehmen an, daß von einem leuchtenden Punkte, dem ultramikroskopischen Teilchen, eine Kugelwelle ausgehe und an einer einzigen Kugeloberfläche gebrochen werde. Durch die austretenden Strahlen wird dann eine neue, nicht mehr kugelförmige Wellenoberfläche bestimmt, die als Ausgang einer neuen Lichterregung angesehen wird. In den zu beobachtenden Punkten, die bei der Betrachtung durch ein Fernrohr im Unendlichen liegen, ist diese Lichterregung zu berechnen. Wie

schon erwähnt, führt diese Aufgabe auf das gleiche Problem, wie die Bestimmung der überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen, die von Airy genau und von Mascart angenähert behandelt worden ist. Bei meiner Untersuchung benutze ich die Mascartsche Methode unter Zugrundelegung der genauen Wellengleichung, da die exakte Durchführung die Auswertung äußerst komplizierter Doppelintegrale bedingt. Daß sich dadurch beim Regenbogenproblem außerordentlich gute Resultate ergeben, zeigte Dr. Möbius in seiner Dissertation¹⁾, an die ich mich bei der Behandlung der vorliegenden Aufgabe eng anschließen werde.

1. Die Gleichung für den austretenden Strahl.

In Fig. 2 gibt AED den Gang eines Strahles in einer Normalebene an.

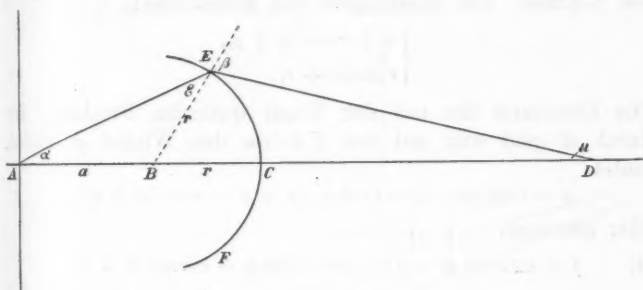


Fig. 2.

Es sei A der leuchtende Punkt, von dem die Strahlen ausgehen. Diese bilden mit dem Zentralstrahl $ABCD$ den Winkel α , treffen auf die brechende Fläche ECF unter dem Winkel ε , verlassen sie unter dem Winkel β und bilden schließlich mit dem Zentralstrahl den Winkel μ . Ferner bedeutet a den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Linse, r den Radius dieser Linse und n ihren Brechungsindex

1) W. Möbius, Zur Theorie des Regenbogens und ihrer experimentellen Prüfung. Dissertation, abgedruckt im 30. Bd. der Abhandl. d. math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Nr. 2.

gegen Luft. Für die ganze weitere Entwickelung sei der Winkel α die unabhängige Veränderliche.

Nach dem Sinusbrechungsgesetze folgt dann sofort:

$$(1) \quad \sin \varepsilon = \frac{a}{r} \sin \alpha,$$

$$(2) \quad \sin \beta = n \sin \varepsilon = \frac{n a}{r} \sin \alpha,$$

$$(3) \quad \mu = \pi + \alpha + \varepsilon - \beta.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Differentiation

$$(3a) \quad d\mu = d\alpha + d\varepsilon - d\beta,$$

$$(3b) \quad \frac{d\mu}{d\alpha} = 1 + \frac{a \cos \alpha}{r \cos \varepsilon} - \frac{n a \cos \alpha}{r \cos \beta}.$$

Für die analytische Behandlung des Problems ist ein Koordinatensystem einzuführen, und zwar sei der Zentralstrahl die X -Achse und die auf ihm im Punkte A errichtete Normale die Y -Achse. Die Koordinaten von E sind dann

$$\begin{cases} a + r \cos(\alpha + \varepsilon), \\ r \sin(\alpha + \varepsilon). \end{cases}$$

Die Gleichung des aus der Kugel tretenden Strahles, der durch E geht und mit der X -Achse den Winkel μ bildet, lautet:

$$y - r \sin(\alpha + \varepsilon) = \tan \mu \cdot (x - a - r \cos(\alpha + \varepsilon)),$$

oder geordnet:

$$(4) \quad f(\alpha) \equiv x \sin \mu - y \cos \mu - a \sin \mu - a n \sin \alpha = 0.$$

2. Die Gleichung der Brennpunktlinie.

Die Gleichung (4) enthält den Parameter α , durch dessen stetige Veränderung von $+\alpha$ bis $-\alpha$ wir die Schar aller Lichtstrahlen erhalten. Die Einhüllende dieser Schar, die Brennpunktlinie, ist dann definiert durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0, \\ \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Führt man die Differentiation nach α aus, so erhält man, wenn man unter μ' die erste Ableitung von μ nach α versteht:

$$(5) \quad \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = x \cos \mu \mu' + y \sin \mu \mu' - a \cos \mu \mu' - a n \cos \alpha = 0.$$

Durch Ausrechnung von x und y aus den beiden Gleichungen (4) und (5) ergeben sich die Koordinaten x und y der Brennnlinie.

$$\begin{array}{l} (4) \quad x \sin \mu - y \cos \mu - a \sin \mu - a n \sin \alpha = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \sin \mu \mu' \\ \cos \mu \end{array} \right| \cdot \cos \mu \mu' \\ (5) \quad x \cos \mu \mu' + y \sin \mu \mu' - a \cos \mu \mu' - a n \cos \alpha = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \cos \mu \\ \sin \mu \end{array} \right| \cdot \sin \mu \end{array}$$

$$x \sin^2 \mu \mu' - y \sin \mu \cos \mu \mu' - a \sin^2 \mu \mu' - a n \sin \mu \sin \alpha \mu' = 0$$

$$x \cos^2 \mu \mu' + y \sin \mu \cos \mu \mu' - a \cos^2 \mu \mu' - a n \cos \mu \cos \alpha = 0$$

$$x \mu' + a \mu' - a n \sin \mu \sin \alpha \mu' - a n \cos \alpha \cos \mu = 0$$

$$x \sin \mu \cos \mu \mu' - y \cos^2 \mu \mu' - a \sin \mu \cos \mu \mu' - a n \sin \alpha \cos \mu \mu' = 0$$

$$x \sin \mu \cos \mu \mu' + y \sin^2 \mu \mu' - a \sin \mu \cos \mu \mu' - a n \cos \alpha \sin \mu = 0$$

$$y \mu' + a n \sin \alpha \cos \mu \mu' - a n \cos \alpha \sin \mu = 0.$$

$$(6) \quad \begin{cases} x = a n \cos \alpha \cos \mu \frac{d\alpha}{d\mu} + a n \sin \alpha \sin \mu + a, \\ y = a n \cos \alpha \sin \mu \frac{d\alpha}{d\mu} - a n \sin \alpha \cos \mu. \end{cases}$$

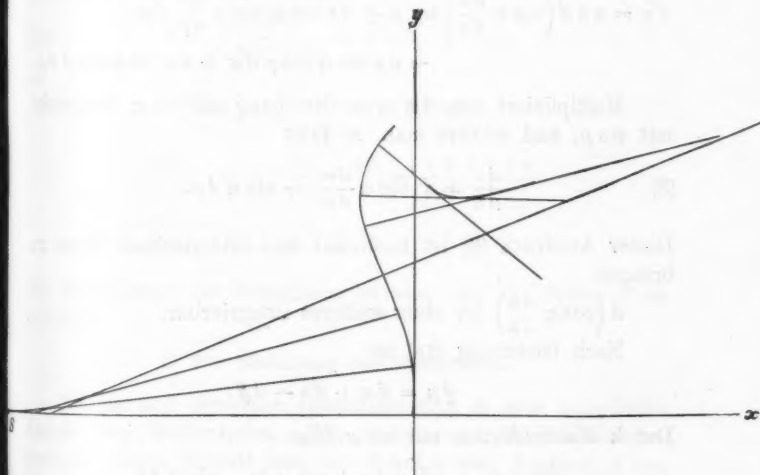


Fig. 3.

In Fig. 3 ist eine solche Brennnlinie gezeichnet. Die Abbildung ist jedoch keine ähnliche, da man die Winkeldifferenzen, die nur Minuten betragen, nicht hätte einzeichnen

können. Die Abbildung ist so gewählt, daß in Richtung der X -Achse eine andere Vergrößerung ist als in Richtung der Y -Achse.

3. Die Gleichung für die Bogenlänge der Brennnlinie.

Das Bogenelement ds der Brennnlinie bildet mit der X -Achse den Winkel μ , daher ist

$$(7) \quad ds = dx \cos \mu + dy \sin \mu.$$

Um s selbst zu berechnen, ist dx und dy zu bestimmen, und die Gleichung (7) zu integrieren. Differenziert man die Gleichungen (6), so erhält man:

$$\begin{aligned} dx &= a n d \left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} \right) \cos \mu - a n \cos \alpha \sin \mu \frac{d\alpha}{d\mu} d\mu \\ &\quad + a n \cos \alpha \sin \mu d\alpha + a n \sin \alpha \cos \mu d\mu, \\ dy &= a n d \left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} \right) \sin \mu + a n \cos \alpha \cos \mu \frac{d\alpha}{d\mu} d\mu \\ &\quad - a n \cos \alpha \cos \mu d\alpha + a n \sin \alpha \sin \mu d\mu. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos \mu$, die zweite mit $\sin \mu$, und addiert man, so folgt

$$(8) \quad \frac{ds}{an} = d \left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} \right) + \sin \alpha d\mu.$$

Dieser Ausdruck (8) ist noch auf eine integrierbare Form zu bringen.

$d \left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} \right)$ ist ohne weiteres integrierbar.

Nach Gleichung (3a) ist

$$d\mu = dx + d\varepsilon - d\beta.$$

Durch Multiplikation mit $\sin \alpha$ folgt

$$\sin \alpha d\mu = \sin \alpha d\alpha + \sin \alpha d\varepsilon - \sin \beta d\beta.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte aus den Gleichungen (1) und (2) ein, so folgt:

$$\sin \alpha d\mu = \sin \alpha d\alpha + \frac{r}{a} \sin \varepsilon d\varepsilon - \frac{r}{an} \sin \beta d\beta.$$

In dieser Gleichung sind sämtliche Glieder integrierbar. Der Ausdruck (8) geht dann über in den folgenden:

$$\frac{ds}{an} = d\left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu}\right) + \sin \alpha d\alpha + \frac{r}{a} \sin \varepsilon d\varepsilon - \frac{r}{an} \sin \beta d\beta.$$

Wir integrieren nun von 0 bis $+\alpha$

$$\int_0^\alpha \frac{ds}{an} = \int_0^\alpha d\left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu}\right) + \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha + \int_0^\varepsilon \frac{r}{a} \sin \varepsilon d\varepsilon - \int_0^\beta \frac{r}{an} \sin \beta d\beta,$$

$$\frac{s}{an} = \left[\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} - \cos \alpha - \frac{r}{a} \cos \varepsilon + \frac{r}{an} \cos \beta \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha},$$

$$(9) \quad \frac{s}{an} = \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\mu} - \cos \alpha - \frac{r}{a} \cos \varepsilon + \frac{r}{an} \cos \beta - b,$$

wobei b den Ausdruck bedeutet

$$(10) \quad b = \frac{r}{r+a-an} - 1 - \frac{r}{a} + \frac{r}{an},$$

da

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = 1 + \frac{a \cos \alpha}{r \cos \varepsilon} - \frac{an \cos \alpha}{r \cos \beta},$$

$$\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1 + \frac{a}{r} - \frac{an}{r} = \frac{r+a-an}{r},$$

$$\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)_{\alpha=0} = \frac{r}{r+a-an}.$$

Die Bogenlänge der Brennpunktlinie ist also von der Spitze S an gerechnet.

4. Die Gleichung der Wellenlinie.

Zu ein und derselben Brennpunktlinie gibt es eine unendliche Anzahl von Wellenlinien. Wir wollen eine Wellenlinie betrachten, deren Schnitt mit der X -Achse den Abstand d von der Spitze S der Brennpunktlinie haben möge. Da diese Spitze in Richtung der negativen X -Achse liegt, so haben wir d negativ anzusetzen. Die Wellenlinie ist nun aber die Evolute der Brennpunktlinie und jeder Lichtstrahl ist zugleich Tangente der Brennpunktlinie und Normale der Wellenlinie. Es ist also auf

jedem Lichtstrahl die Strecke zwischen Brennpunkt und Wellenlinie $-d + s$, deren Projektion auf die Koordinatenachsen die Koordinaten ξ , η eines Punktes der Wellenlinie ergibt. Wir erhalten demnach

$$x - \xi = (-d + s) \cos \mu,$$

$$y - \eta = (-d + s) \sin \mu.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werte von x und y aus (6) ein und löst nach ξ und η auf, so folgt:

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = a n \sin \alpha \sin \mu \\ \quad + (a n \cos \alpha + r n \cos \varepsilon - r \cos \beta + a n b + d) \cos \mu + a, \\ \eta = -a n \sin \alpha \cos \mu \\ \quad + (a n \cos \alpha + r n \cos \varepsilon - r \cos \beta + a n b + d) \sin \mu. \end{cases}$$

Für die numerische Berechnung wird dann d so bestimmt, daß für $\alpha = 0$ die Klammer

$$(a n \cos \alpha + r n \cos \varepsilon - r \cos \beta + a n b + d)$$

verschwindet. Es ergibt sich für $\alpha = 0$

$$(\xi - a) = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0.$$

Das heißt aber: Die für die Berechnung zugrunde gelegte Wellenlinie geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Die Wendepunkte der Wellenlinie, die sich aus der Gleichung $d\mu/d\alpha = 0$ ergeben würden, explizit darzustellen, ist mir nicht gelungen, da durch Auftreten von Quadratwurzeln der Grad der Gleichung in α so hoch wird, daß ihre Auflösung unmöglich wird.

5. Das Bogenelement $d\sigma$ der Wellenlinie.

Das Bogenelement $d\sigma$ der Wellenlinie schließt mit der X -Achse den Winkel $\mu - \pi/2$ ein. Demnach ist

$$d\sigma = d\xi \cos\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) + d\eta \sin\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(13) \quad d\sigma = d\xi \sin \mu - d\eta \cos \mu.$$

Bildet man nun aus den Gleichungen (12) $d\xi$ und $d\eta$, multipliziert $d\xi$ mit $\sin \mu$ und $d\eta$ mit $\cos \mu$ und subtrahiert diese beide Gleichungen voneinander, so folgt:

$$d\xi = an \cos \alpha \sin \mu d\alpha + an \sin \alpha \cos \mu d\mu \\ - (an \sin \alpha d\alpha + rn \sin \varepsilon d\varepsilon - r \sin \beta d\beta) \cos \mu \\ - (an \cos \alpha + rn \cos \varepsilon - r \cos \beta + an b + d) \sin \mu d\mu,$$

$$d\eta = -an \cos \alpha \cos \mu d\alpha + an \sin \alpha \sin \mu d\mu \\ - (an \sin \alpha d\alpha + rn \sin \varepsilon d\varepsilon - r \sin \beta d\beta) \sin \mu \\ + (an \cos \alpha + rn \cos \varepsilon - r \cos \beta + an b + d) \cos \mu d\mu,$$

$$d\sigma = an \cos \alpha d\alpha - (an \cos \alpha + rn \cos \varepsilon - r \cos \beta + an b + d) d\mu.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $d\alpha$ und setzt für $d\mu/d\alpha$ den Wert (3b) ein, so erhält man:

$$(14) \left\{ \frac{d\sigma}{d\alpha} = an \cos \alpha - \frac{(an \cos \alpha + rn \cos \varepsilon - r \cos \beta + an b + d) \cdot (r \cos \varepsilon \cos \beta + a \cos \alpha \cos \beta - an \cos \alpha \cos \varepsilon)}{r \cos \varepsilon \cos \beta} \right.$$

6. Die auf einem Elemente df der Wellenfläche vorhandene Schwingungsamplitude.

Die vom leuchtenden Punkte ausgehende sphärische Welle besitzt in allen ihren Elementen die gleiche Schwingungsamplitude. Dasselbe gilt aber nicht mehr ohne weiteres für die Wellenfläche, die nach der Brechung an der Kugelfläche entsteht, da das Licht bei der Brechung geschwächt wird. Nach Fresnel verfährt man bei der Berechnung dieser Schwächung so, als ob die eine Hälfte des ankommenden Lichtes in der Einfallsebene, die andere senkrecht zu ihr polarisiert wäre. Es sei L die Lichtstärke in df , dem Flächenelemente der austretenden Welle, L' die in df' der einfallenden Kugelwelle, das von denselben Strahlen wie df begrenzt wird. Das Licht wird durch die Brechung geschwächt und zwar bleibt nach Fresnel nur der Teil

$$(15) \quad 1 - C^2$$

übrig, wobei

$$C = \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)} \quad \text{oder} \quad = \frac{\tan(\beta - \varepsilon)}{\tan(\beta + \varepsilon)},$$

je nachdem wir den Teil nehmen, der in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr als polarisiert gedacht wird. Außer-

dem verhalten sich L und L' umgekehrt wie die zugehörigen Flächenelemente df und df' . Wir erhalten demnach

$$(16) \quad l = L : L' = \frac{df'(1 - C^2)}{df}.$$

Es gilt nun noch df und df' zu berechnen. Die Wellenfläche entsteht durch Rotation der Wellenlinie um die X -Achse. Der Drehwinkel sei ω . Sind ferner die Koordinaten der Wellenfläche ξ, η', ζ' , so ist:

$$(17) \quad \begin{cases} \xi' = \xi, \\ \eta' = \eta \cos \omega, \\ \zeta' = \eta \sin \omega. \end{cases}$$

Bei der Rotation sind die Wellenlinien die Meridiankurven, während die Bahnen der Wellenlinie die Parallelkreise sind. Als Oberfläche df nehmen wir das Rechteck zwischen zwei benachbarten Parallelkreisen p_1 und p_2 und zwischen zwei benachbarten Meridiankurven W_1 und W_2 mit den Seiten $d\sigma$ und $\eta d\omega$. df' liegt zwischen denselben ω -Ebenen, ist ebenfalls ein Rechteck und hat die Seiten

$$ada \text{ und } a \sin \alpha d\omega.$$

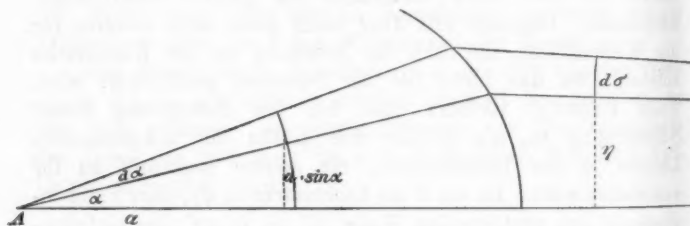


Fig. 4.

Wir erhalten also:

$$(18a) \quad df = \eta d\omega d\sigma,$$

$$(19a) \quad df' = ada \cdot a d\omega.$$

Für die auf dem Flächenelemente der Wellenlinie vorhandene Schwingungsamplitude folgt dann

$$(20) \quad l = \frac{a^2 \sin \alpha (1 - C^2)}{\eta \frac{d\sigma}{d\alpha}}.$$

Wir haben nun alle Größen berechnet, um die in einem beliebigen Punkte P auftretende Lichterregung zu bestimmen. Um dies durchzuführen, braucht man nur von den zu beobachtenden Punkten aus über die ganze Wellenoberfläche zu integrieren und erhält dann in ihnen streng die Lichtintensität mit den zugehörigen Phasen. Da aber die Mascartsche Methode viel rascher zum Ziele führt und hinreichend gute Werte liefert, so soll auf die Integration verzichtet werden.

7. Die Mascartsche Formel.

Wenn man die Lichtstärke in irgend einem Punkte berechnen will, so ergibt sich hier das gleiche Problem wie bei der Theorie des Regenbogens. Wie dort Streifensysteme infolge der Deformation von Kugelwellen auftreten, so werden auch im vorliegenden Falle durch Deformation der ursprünglich sphärischen Welle Phasendifferenzen entstehen, durch die abwechselnd helle und dunkle Ringe erzeugt werden. Nach Mascart denkt man sich die Streifen erzeugt durch Interferenz der von den Polen der Wellenfläche in Richtung der Normalen ausgehenden Lichtstrahlen. Beim Regenbogenproblem ergeben sich nun zwei Wendepunkte und folglich drei Pole, von denen aber der eine infolge geringer Lichtintensität nicht in Betracht kommt. Im vorliegenden Falle treten auch zwei Wendepunkte und drei Pole auf, von denen aber keiner zu vernachlässigen ist, da alle drei Pole, wie sich aus einer später folgenden Tab. 3 (p. 203) ergeben wird, annähernd gleiche Intensitäten besitzen. Es muß daher die Beugung durch Interferenz dreier Wellenzüge erzeugt gedacht werden. Ist A die resultierende, a_1, a_2, a_3 die in den Polen vorhandene Amplitude, so erhält man durch Zusammensetzen dieser drei Schwingungen

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 a_1 a_2 \cos \delta_{12} \\ + 2 a_1 a_3 \cos \delta_{13} + 2 a_2 a_3 \cos \delta_{23},$$

wobei $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ die Phasendifferenzen der drei Lichtstrahlen bedeuten. Nun hat Mascart gezeigt, daß sich bei Zusammensetzung zweier Schwingungen in dieser Weise die Intensität falsch ergibt. Sie wird dagegen richtig, wenn man zu den Phasendifferenzen in den beiden Polen, in denen die Krümmung

der Wellenlinie verschiedenes Vorzeichen hat, eine Phasenverzögerung von $\pi/2$ annimmt. Wollen wir also die Mascartsche Formel in ihrer Erweiterung anwenden, so müssen wir für die Pole, in denen die Krümmung der Wellenlinie verschiedenes Vorzeichen hat, noch eine Phasenverzögerung von

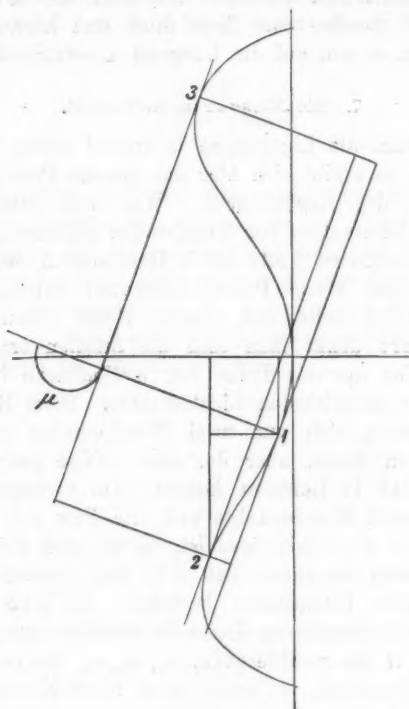


Fig. 5.

$\pi/2$ ansetzen. Die genauere Begründung für dieses Verfahren wird von Hrn. Dr. Möbius demnächst veröffentlicht werden.

In Fig. 5 ist eine Wellenlinie gezeichnet und zwar in derselben Verzerrung wie in Fig. 3. Es ergibt sich dann für die erweiterte Mascartsche Formel:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 a_1 a_2 \sin \delta_{12} \\ &\quad + 2 a_1 a_3 \sin \delta_{13} + 2 a_2 a_3 \cos \delta_{23}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\delta_{12} = \frac{2 \pi A_{12}}{\lambda},$$

$$\delta_{13} = \frac{2 \pi A_{13}}{\lambda},$$

$$\delta_{23} = \frac{2 \pi A_{23}}{\lambda}$$

zu setzen ist, wenn A die geometrische Wegedifferenz der Pole, d. h. der Abstand der zu den Polen gehörigen Tangential-ebenen ist.

Bevor wir nun die Gleichung (21) weiter vereinfachen können, ist es notwendig, die in den Polen auftretenden Schwingungsamplituden zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung (20). Die folgende Tab. 3 zeigt den Verlauf der Schwingungsamplituden für den Fall $a = 5,680$ mm (a = Abstand des leuchtenden Teilchens vom Mittelpunkt der brechenden Linse).

Tabelle 3.

α	Sinusanteil	Tangens- anteil	α	Sinusanteil	Tangens- anteil
0°	0,42	0,42	11°	0,42	0,44
1	0,42	0,42	12	0,42	0,45
2	0,42	0,42	13	0,41	0,46
3	0,42	0,43	14	0,41	0,47
4	0,42	0,43	15	0,41	0,48
5	0,42	0,43	16	0,40	0,47
6	0,42	0,43	17	0,39	0,45
7	0,42	0,43	18	0,38	0,42
8	0,42	0,44	19	0,34	0,39
9	0,42	0,44	20	0,23	0,36
10	0,42	0,44	20°25'38''	0	0

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß die Amplituden längs der Wellenlinie sowohl für den Sinus als auch für den Tangensanteil als konstant angesehen werden können. Für die Mascart'sche Formel kommen ja überhaupt nur die Winkel $\alpha = 0$ bis $\alpha = 5^\circ 30'$ in Betracht. Da sich ferner die beiden Anteile

nur wenig unterscheiden, so können die beiden durch sie erzeugten Ringsysteme nur ganz geringe Differenzen aufweisen. Wir brauchen also für die beiden Anteile die Ringsysteme nicht besonders zu berechnen, sondern können gleich von vornherein die Amplituden auf der Wellenfläche konstant annehmen. Wir setzen die Amplituden gleich 1, da es ja nur auf die verhältnismäßigen Lichtintensitäten ankommt. Die Gleichung (21) geht dann über in die Gleichung

$$J = 3 + 2 [\sin \delta_{12} + \sin \delta_{13} + \cos(\delta_{12} - \delta_{13})].$$

Dieser Ausdruck ist für die numerische Berechnung noch ziemlich unbequem. Es soll daher die Summe in der Klammer in ein Produkt verwandelt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} J &= 3 + 2 \left[2 \sin \frac{\delta_{12} + \delta_{13}}{2} \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} + \cos^2 \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \right. \\ &\quad \left. - 1 + \cos^2 \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \right], \\ &= 3 + 2 \left[2 \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \left(\sin \frac{\delta_{12} + \delta_{13}}{2} + \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \right) - 1 \right], \\ &= 1 + 2 \left[2 \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \left(\sin \frac{\delta_{12} + \delta_{13}}{2} + \sin \frac{180 - (\delta_{12} - \delta_{13})}{2} \right) \right], \\ &= 1 + 2 \left[2 \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} 2 \sin \frac{\frac{\delta_{12} + \delta_{13}}{2} + \frac{180 - (\delta_{12} - \delta_{13})}{2}}{2} \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{\frac{\delta_{12} + \delta_{13}}{2} - \frac{180 - (\delta_{12} - \delta_{13})}{2}}{2} \right], \\ &= 1 + 8 \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \sin \frac{180 + 2 \delta_{13}}{4} \cos \frac{180 - 2 \delta_{12}}{4}, \\ &= 1 + 8 \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2} \sin \left(45 + \frac{\delta_{13}}{2} \right) \cos \left(45 - \frac{\delta_{12}}{2} \right), \\ &= 1 + 8 \sin \left(45 + \frac{\delta_{13}}{2} \right) \sin \left(45 + \frac{\delta_{13}}{2} \right) \cos \frac{\delta_{12} - \delta_{13}}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man nun noch für δ_{12} und δ_{13} die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich schließlich

$$(22) \quad J = 1 + 8 \sin \left(45 + \frac{2\pi \frac{A_{13}}{2}}{\lambda} \right) \sin \left(45 + \frac{2\pi \frac{A_{12}}{2}}{\lambda} \right) \cos \frac{2\pi \frac{A_{12}}{2}}{\lambda}.$$

8. Die Berechnung der Δ .

Es sind nun zunächst die geometrischen Wegdifferenzen der Pole der Wellenlinie zu berechnen. Aus Fig. 5 folgt rein geometrisch, da für die Pole zu einem bestimmten μ drei verschiedene α , ε und β gehören:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (\xi_1 - \xi_2) \cos(\mu - \pi) - (\eta_2 - \eta_1) \sin(\mu - \pi) \\ &= -(\xi_1 - \xi_2) \cos \mu + (\eta_2 - \eta_1) \sin \mu. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte für ξ und η aus den Gleichungen (12) ein, so erhält man

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{12} &= a n (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + r n (\cos \varepsilon_2 - \cos \varepsilon_1) \\ &\quad - r (\cos \beta_2 - \cos \beta_1). \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber Δ_{12} klein gegenüber den Gliedern, aus denen es sich zusammensetzt. Da es aber gerade auf eine große Genauigkeit der Δ ankommt, so wäre die Berechnung der einzelnen Summanden auf viele Dezimalstellen notwendig. Um dies zu vermeiden, soll versucht werden auch diese Summe in ein Produkt zu verwandeln.

Aus Gleichung (3) folgt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ die zu einem μ gehörigen Winkel bedeuten:

$$\pi + \alpha_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 = \pi + \alpha_2 + \varepsilon_2 - \beta_2,$$

oder

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = (\beta_2 - \beta_1).$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$x_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}, \quad y_1 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}, \quad z_1 = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \quad y_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \quad z_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2},$$

so erhält man

$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = -2 \sin x_1 \sin x_2,$$

$$\cos \varepsilon_2 - \cos \varepsilon_1 = -2 \sin y_1 \sin y_2,$$

$$\cos \beta_2 - \cos \beta_1 = -2 \sin z_1 \sin z_2,$$

Aus Gleichung (1) folgt:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_2 &= \frac{r}{a} \sin \varepsilon_2, \\ \sin \alpha_1 &= \frac{r}{a} \sin \varepsilon_1, \\ \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 &= \frac{r}{a} (\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1), \\ (24a) \quad r &= a \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1}.\end{aligned}$$

Aus Gleichung (2) folgt:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_2 &= \frac{r}{a n} \sin \beta_2, \\ \sin \alpha_1 &= \frac{r}{a n} \sin \beta_1, \\ \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 &= \frac{r}{a n} (\sin \beta_2 + \sin \beta_1). \\ (24b) \quad r &= a n \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \beta_2 + \sin \beta_1}.\end{aligned}$$

Setzt man den Wert für r aus Gleichung (24a) in das zweite Glied, den Wert für r aus (24b) in das dritte Glied der Gleichung (23) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}A_{12} &= -2 a n \left[\sin x_1 \sin x_2 + \sin y_1 \sin y_2 \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1} \right. \\ &\quad \left. - \sin z_1 \sin z_2 \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \beta_2 + \sin \beta_1} \right], \\ &= -2 a n \left[\sin x_1 \sin x_2 + \sin y_2 \frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos y_2} - \sin z_2 \frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos z_1} \right], \\ &= -\frac{2 a n \sin x_1}{\cos y_2 \cos z_2} [\sin x_2 \cos y_2 \cos z_2 + \cos x_2 \sin y_2 \cos z_2 \\ &\quad - \cos x_2 \cos y_2 \sin z_2].\end{aligned}$$

Die Klammer kann noch weiter vereinfacht werden. Sie nimmt die folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}[\dots] &= \cos z_2 \sin(x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2 \sin z_2, \\ \text{da aber } z_2 &= x_2 + y_2, \text{ so folgt} \\ [\dots] &= \sin(x_2 + y_2) \cos(x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2 \sin(x_2 + y_2), \\ &= \sin(x_2 + y_2) \{\cos(x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2\}, \\ &= \sin(x_2 + y_2) \{\cos x_2 \cos y_2 - \sin x_2 \sin y_2 - \cos x_2 \cos y_2\}, \\ &= -\sin(x_2 + y_2) \sin x_2 \sin y_2 = -\sin x_2 \sin y_2 \sin z_2.\end{aligned}$$

Wir erhalten also, wenn wir an Stelle der Klammer den umgeformten Ausdruck einsetzen:

$$A_{12} = 2 a n \sin x_1 \sin x_2 \tan y_3 \tan z_2.$$

Die drei verschiedenen Δ sind also definiert durch die Gleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} A_{12} = 2 a n \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \tan \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \tan \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}, \\ A_{23} = 2 a n \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} \tan \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} \tan \frac{\beta_3 - \beta_2}{2}, \\ A_{13} = A_{12} + A_{23}. \end{cases}$$

III. Teil.

Experimentelle Bestimmung der Konstanten, Messungen und numerische Rechnung.

1. Der Abstand des leuchtenden Teilchens von dem Mittelpunkt der Linse.

Um Theorie und Experiment vergleichen zu können, ist es notwendig, den Abstand a des leuchtenden Teilchens von dem Mittelpunkt der Linse zu bestimmen, da sich die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop mit diesem Abstand ändern. Es ist nun aber nicht gelungen, diesen Abstand direkt zu messen, da das leuchtende Teilchen innerhalb des Goldrubinglases liegt und es auf eine große Genauigkeit ankommt. Ich mußte daher eine indirekte Methode anwenden.

Bei scharfer Einstellung auf das Teilchen muß es bei der Beobachtung im Unendlichen im Brennpunkte des Objektivs liegen. Durch Berechnung der Brennweite findet man ein a , das dem für die Rechnung zugrunde gelegten ziemlich nahe kommen muß. Die Beugungserscheinung wird komplizierter, wenn man diesen Abstand verkleinert. Für ein a , das etwas kleiner ist, als die gefundene Brennweite, berechnete ich auf Grund der im 2. Abschnitte entwickelten Formeln die Beugungserscheinungen und stellte auf ein Ringsystem ein, deren Durchmesser mit den berechneten übereinstimmte. Auf diese Weise hatte ich ein ganz bestimmtes a gefunden. Ich verkleinerte nun das a um einen Betrag, den ich mit Hilfe der Mikrometerschraube am Mikroskoptubus auf $\frac{1}{1000}$ mm messen konnte. Für dieses neue a bestimmte ich nun die Durchmesser der

Beugungsringe theoretisch und experimentell. War die Theorie richtig, so mußten die berechneten und beobachteten Werte übereinstimmen, was sich auch schließlich ergab.

2. Der Radius der brechenden Kugellinse.

Bei allen weiteren Versuchen wurde als Objektiv eine von der Firma Zeiss hergestellte Linse benutzt, die die Form einer Halbkugel haben sollte. Es galt nun den Radius dieser Linse zu bestimmen. Mit Hilfe eines Komparators maß ich zunächst den Durchmesser des Frontkreises der Linse auf tausendstel mm genau. Unter Voraussetzung einer vollkommenen Halbkugel wäre damit der Radius der Linse bestimmt gewesen. Dies konnte ich aber nicht ohne weiteres annehmen, und mußte daher eine Vergleichsmessung anstellen. Die Methode, die ich anwendete, ist die in der Dissertation von Dr. Möbius auf p. 186 erwähnte, und besteht darin, daß der Radius einer Halbkugel aus deren absolutem und spezifischem Gewichte berechnet werden kann. Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes wurde eine wässrige Lösung von borwolframsaurem Cadmium so hergestellt, daß die Linse in ihr gerade schwebte. Mit Hilfe eines mit Quecksilber beschwerten Glaskörpers wurde dann das spezifische Gewicht dieser Lösung und damit das der Linse bestimmt. Die Wägungen wurden mit einer Buneschen Wage für 20 g Maximalbelastung durchgeführt. Nachdem endlich sämtliche Größen auf die Temperatur von 20° reduziert waren, eine Temperatur, bei der ich alle Beobachtungen anstellte, zeigte sich eine Abweichung von $\frac{1}{100}$ mm in den nach den beiden Methoden gefundenen Werten für den Radius der Linse. Die Abweichung ließ sich nur daraus erklären, daß ich keine exakte Halbkugel vor mir hatte. Es mußte daher die ziemlich schwierige Bestimmung der Dicke der Linse ausgeführt werden. Da hierbei das Sphärometer keine genauen Werte lieferte, ließ ich mir einen Apparat herstellen, dessen Vorder- und Seitenansicht die Fig. 6 veranschaulicht. Er bestand im wesentlichen aus einer mit einem Einschnitt versehenen Platte, auf der die Linse befestigt werden konnte. Die Platte selbst ließ sich durch zwei Schrauben *a* und *b* nach beiden Seiten neigen. Nachdem zunächst die Fläche des Frontkreises der Linse

parallel zum Fadenkreuz des Komparatormikroskopes aufgestellt war, wurden der Abstand der Ränder der Linse auf tausendstel mm genau gemessen. Dann ward durch eine der Schrauben *a* und *b* eine andere Neigung der Platte und Linse

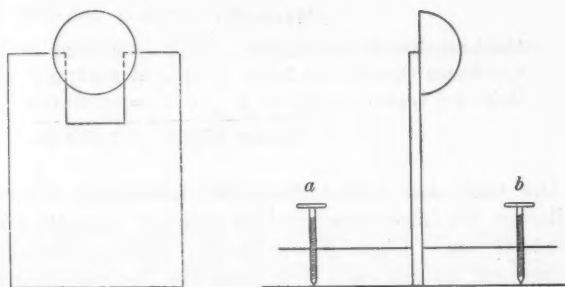


Fig. 6.

hergestellt und wieder gemessen usw. Die Werte für Abstände der Ränder wurden stetig kleiner, bis sie nach Durchgang durch ein Minimum wieder zunahmen. Das Minimum entspricht der Dicke der Linse



und wurde graphisch bestimmt. Um den Grad der Genauigkeit zu erhöhen, wurden 50 Kurven gezeichnet, deren Minima überraschend gut übereinstimmten. Hierbei zeigte sich nun, daß die Dicke der Linse von dem Radius des Frontkreises verschieden war. Aus der Höhe und Breite der Linse einerseits und aus der Formel für den Inhalt eines Kugelsegmentes

$$V = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h),$$

aus dem absoluten und spezifischen Gewichte andererseits wurde dann der Radius der Linse bestimmt. Es folgen hier Werte der Messungen.

1. Methode:

Durchmesser des Frontkreises der Linse	= 2,9875 mm
Dicke der Linse	= 3,0080 „
<hr/>	
hieraus folgt r	= 2,9875 mm

2. Methode:

Absolutes Gewicht der Linse	= 0,1886 g
Spezifisches Gewicht der Linse . . .	= 2,4571 g
Dicke der Linse	= 3,0080 mm
<hr/>	
hieraus folgt r	= 2,9879 mm

Die nach den beiden Methoden bestimmten Werte für den Radius der Linse unterscheiden sich nur noch um 4 Zehntausendstel mm. Diese Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenze, so daß eine noch genauere Methode überflüssig ist. Für die numerische Rechnung habe ich das Mittel aus den beiden r zugrunde gelegt, so daß der Radius der brechenden Fläche

$$r = 2,9877$$

beträgt.

3. Die Brechungsexponenten.

Die Bestimmung der Brechungsexponenten von Goldrubinglas, Linse und Immersion wurde ausgeführt mit Hilfe eines Refraktometers nach Abbe. Nachdem der Apparat vorher mit destilliertem Wasser geprüft und als exakt befunden war, wurden die Messungen bei Natriumlicht und einer Temperatur von 20° angestellt, und zwar 50 mal im Laufe verschiedener Tage.

Wie schon erwähnt, sollte der Brechungsexponent der Linse mit dem des Goldrubinglases übereinstimmen. Der letztere betrug $n_0 = 1,5074$, während der der Linse den Wert $n_0 = 1,5071$ besaß. Diese Abweichung ist so gering, daß die Brechung der Kugelwelle an der Oberfläche des Glases unberücksichtigt bleiben kann. Als Immersion wurde ein Gemisch von Benzoesäure-Methylester ($n_0 = 1,5180$) und Benzylacetat ($n_0 = 1,5065$) verwendet. Diese Mischung besaß einen Brechungsexponenten, dessen Werte zwischen 1,5069 und 1,5073 schwankte. Für die Messung der Ringdurchmesser kommen

solche kleine Schwankungen überhaupt nicht in Betracht, da eine Immersion mit Brechungsindex $n_0 = 1,5065$ genau die gleichen Werte lieferte wie die Immersion mit Brechungsindex $n_0 = 1,5180$. Trotzdem kontrollierte ich die Brechungsindizes vor jeder Messung und korrigierte sie durch Zusetzen der einen oder der anderen Flüssigkeit.

Der Rechnung liegt demnach ein Brechungsindex zugrunde von dem Werte

$$n_0 = 1,5071.$$

4. Wellenlänge des Lichtes und Lichtquelle.

Für die Berechnung der Beugungserscheinungen ist es notwendig, Licht von ganz bestimmter Wellenlänge vorauszusetzen. Ich versuchte daher homogenes Licht zu verwenden, indem ich als Lichtquelle eine Quecksilberlampe benutzte. Dies führte aber zu keinem günstigen Ergebnis, da die Beugungsringe infolge geringer Lichtintensität kaum sichtbar waren. Auch ein schmaler Streifen des Spektrums lieferte noch nicht die erforderliche Intensität. Ich mußte daher einen breiten Streifen des Spektrums als Lichtquelle verwenden, und zwar nahm ich gelbes Licht, da diese Farbe für die subjektive Beobachtung sehr günstig war. Die Ungenauigkeit, daß die Ringe durch Licht von verschiedener Wellenlänge erzeugt werden, ist aber von ganz geringer Bedeutung, da die Durchmesser der Ringe für rotes Licht sich nur wenig von denen für grünes Licht unterscheiden. Die Abweichungen überschritten kaum die Ungenauigkeit der Messung. Ich setzte daher in der numerischen Rechnung als Wellenlänge des Lichtes die des Natriumlichtes voraus

$$\lambda = 589 \mu\mu.$$

Als Lichtquelle diente die für das Ultramikroskop bestimmte Bogenlampe, deren Licht durch ein Schwefelkohlenstoffprisma in ein Spektrum zerlegt wurde. Die Bogenlampe wurde seitwärts aufgestellt, so daß das gelbe Licht auf einen Straubelschen Kompensator fiel, der die Regulierung bewirkte.

5. Das Spektrometer.

Um die Durchmesser der Beugungsringe möglichst genau messen zu können, wurde ein Spektrometer von Spindler & Hoyer in Göttingen benutzt, mit Hilfe dessen man auf Sekunden ablesen konnte. Zu diesem Zwecke mußte das Mikroskop um 90° umgelegt und mittels eines Tisches am Spektrometer so befestigt werden, daß die Objektivlinse gerade in die Spektrometerachse fiel. Da bei dieser Anordnung das Fernrohr zu niedrig lag, wurde es durch einen Aluminiumarm so weit erhöht, bis seine Achse mit der des Mikroskopes eine gerade Linie bildete.

6. Das Objektiv.

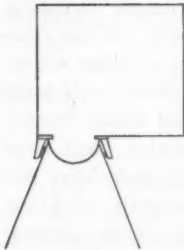
Wie schon erwähnt, benutzte ich als Objektiv eine von der Firma Zeiss hergestellte Linse mit einer Fassung, die das Herausnehmen der Linse leicht gestattete. An dieser Fassung wurde ein Glastrog zur Aufnahme der Immersion durch Wasser-

 glas festgekittet. Damit die Flüssigkeit nicht durch die Fassung hindurchdringen konnte, wurde zwischen ihr und der Linse ein Gummiring eingelegt, der aber oft erneuert werden mußte, da er von der Immersionsflüssigkeit rasch zerstört wurde. Die Fig. 7 zeigt schematisch das Objektiv. Das Goldrubinglas wurde schließlich von oben durch einen nach drei Richtungen verstellbaren Arm in die Flüssigkeit getaucht.

Fig. 7.

7. Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung für die Messung der Durchmesser der Beugungsringe ist prinzipiell dieselbe wie bei der gewöhnlichen ultramikroskopischen Anordnung. Die einzigen Unterschiede liegen darin, daß die Lichtquelle seitwärts aufgestellt wurde und das Licht erst nach Durchgang durch ein Schwefelkohlenstoffprisma und einen Straubelschen Kompensator durch die entsprechenden Sammellinsen in das Präparat gelangen konnte, und schließlich, daß das Mikroskop nach Um-

legen um 90° auf ein Spektrometer aufgestellt wurde. Die Fig. 8 gibt die Versuchsanordnung an.

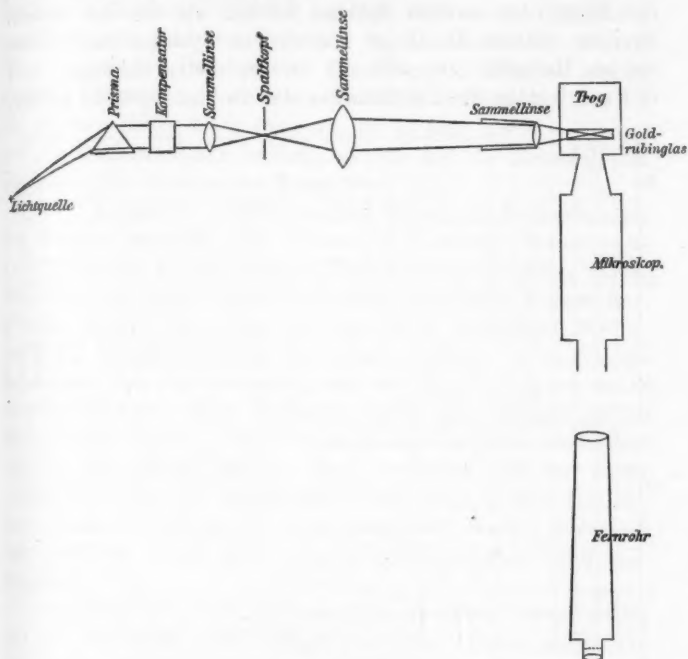


Fig. 8.

8. Die Beugungsringe und ihre Messung.

Betrachtet man im Ultramikroskop mit irgend einem Objektiv ein Präparat mit ultramikroskopischen Teilchen, so sieht man zunächst ein leuchtendes Scheibchen, das von einem dunklen und einem hellen Ringe umgeben ist. Verkleinert man dann den Abstand des Teilchens von dem Objektiv, so werden die Ringe kleiner, während sich gleichzeitig von außen her neue Ringe angliedern. Sehr bald tritt aber eine neue, ganz eigenartige Erscheinung auf. Es kommt nämlich zu den bereits vorhandenen Ringen ein zweites Ringsystem hinzu, das sich dadurch bemerkbar macht, daß einige Ringe des

ersten Systems an Helligkeit einbüßen. Diese beiden Systeme unterscheiden sich aber wesentlich voneinander. Erstens sind die Ringe des zweiten Systems breiter als die des ersten, zweitens nehmen die Ringe des zweiten Systems nach außen hin an Helligkeit zu, während die des ersten abklingen, und drittens werden die Durchmesser des zweiten Systems größer,

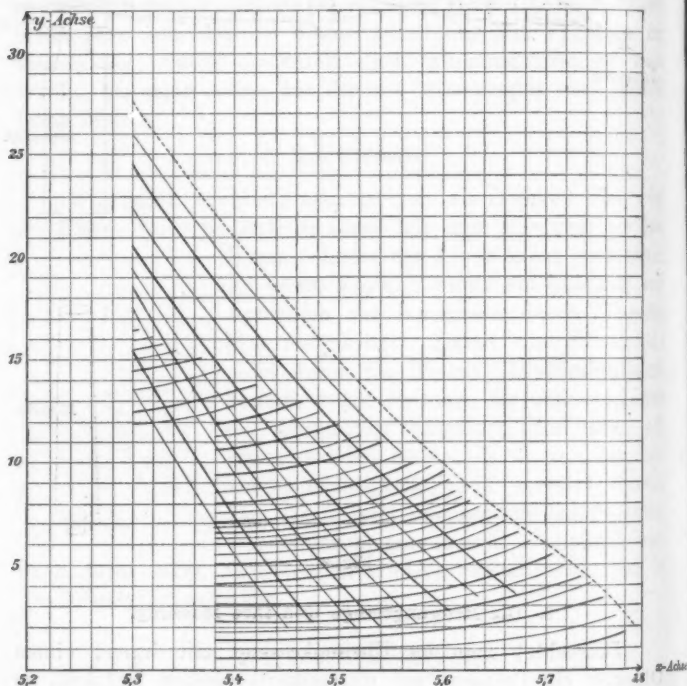


Fig. 9.

wenn man das Objektiv dem leuchtenden Teilchen nähert. Wenn sich die beiden Systeme auch zum Teil durchsetzen, so beschränkt sich das erste System mehr auf den inneren, das zweite System aber mehr auf den äußeren Teil. In Fig. 9 sind für verschiedene Abstände a des Teilchens vom Objektiv die Werte der Durchmesser eingetragen, so daß man ein Bild

von der Erscheinung erhält. Es bedeuten die stärker ausgezogenen Linien die Minima, die schwächer ausgezogenen Linien die Maxima. Auf der x -Achse wurden die Abstände a so abgetragen, daß ein Teilstrich $\frac{1}{50}$ mm bedeutet, während die y -Achse die Durchmesser der Ringe in Minuten angibt, daß ein Teilstrich = 1 Minute. Natürlich brechen bei $a = 5,4$ die inneren Ringe nicht etwa ab, da es aber bei $a = 5,3$ nur auf die äußeren Ringe ankam, so ließ ich die Messung und Rechnung für die inneren Ringe weg.

Die Messungen selbst wurden durch die Schwankungen des Turmes beeinträchtigt, in den die Messungen hatten stattfinden müssen, da die anderen Instituträume vergeben waren. Trotzdem das Spektrometer auf einen Steinpfeiler gesetzt war, konnten exakte Messungen nur am Abend ausgeführt werden, wenn die übrigen Arbeiten im Institut ruhten. Besonders erschwerend war der Umstand, daß der Experimentator, nachdem er auf einen Ring eingestellt hatte, zum Ablesen auf die Seite treten mußte. Dadurch wurde der Fußboden erschüttert und die Einstellung auf den Ring vernichtet. Es war daher unmöglich allein zu beobachten; und deshalb half mir Hr. stud. math. Fickenwirth in freundlichster Weise, wofür ich ihm noch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Nachdem alle Vorsichtsmaßregeln getroffen waren, stellte ich auf ein berechnetes Ringsystem ein. Dann wurde die Mikrometerschraube um einen meßbaren Betrag verstellt und die Ringe wieder gemessen, und so fort für die verschiedensten Abstände des leuchtenden Punktes von dem Objektiv. Dabei wurde jeder Ring an verschiedenen Tagen je 10 mal gemessen. Die inneren, engeren Ringe gaben gewöhnlich die besseren Werte, während die äußeren Ringe infolge ihrer Breite größere Differenzen aufwiesen. Um auch die Ungenauigkeit des Teilkreises zu eliminieren, wurden die Messungen an verschiedenen Stellen des Teilkreises vorgenommen.

9. Die Form der Wellenlinie.

Für das Verständnis der Beugungserscheinungen ist es notwendig, zu einigen Abständen a des leuchtenden Punktes von dem Objektiv die durch den Mittelpunkt der brechenden

Fläche gehenden Wellenlinien zu zeichnen. Auf p. 222 ist dies für sieben verschiedene a geschehen und in Tab. 4 ist die Rechnung für $a = 5,680$ mm durchgeführt.

Tabelle 4.

α	ε	β	$\pi - \mu$	$(\xi - a)$	η
0° 0'	0°	0°	0°	0	0
30	0° 57' 2''	0 25' 58''	- 0 1' 5''	-0,000019	+0,074702
1 0	1 54 5	2 51 58	- 0 2 7	-0,000046	0,149398
30	2 51 9	4 18 5	- 0 3 4	-0,000107	0,224083
2 0	3 48 15	5 44 20	- 0 3 56	-0,000175	0,298751
30	4 45 24	7 10 46	- 0 4 38	-0,000274	0,373396
3 0	5 42 37	8 37 27	- 0 5 10	-0,000377	0,448013
30	6 39 53	10 4 26	- 0 5 28	-0,000493	0,522596
4 0	7 37 15	11 31 45	- 0 5 30	-0,000615	0,597138
30	8 34 42	12 59 28	- 0 5 14	-0,000730	0,671636
5 0	9 32 15	14 27 39	- 0 4 36	-0,000835	0,746082
30	10 29 56	15 56 21	- 0 3 35	-0,000927	0,820471
6 0	11 27 44	17 25 38	- 0 2 6	-0,000990	0,894695
30	12 25 41	18 55 35	- 0 0 7	-0,001007	0,969057
7 0	13 23 48	20 26 14	+ 0 2 26	-0,000991	1,04324
30	14 22 4	21 57 41	+ 0 5 37	-0,000897	1,11735
8 0	15 20 32	23 30 2	+ 0 9 30	-0,000745	1,19136
30	16 19 13	25 3 21	+ 0 14 9	-0,000478	1,26523
9 0	17 18 6	26 37 45	+ 0 19 39	-0,000130	1,33909
30	18 17 13	28 13 20	+ 0 26 7	+0,000356	1,41278
10 0	19 16 35	29 50 13	+ 0 33 38	+0,000995	1,48636
15 0	29 28 31	47 51 54	+ 3 23 23	+0,239640	2,21813
20 0	40 33 31	78 30 29	+17 56 58	+1,658015	3,03011

10. Die Durchmesser der Beugungsringe.

Um die Durchmesser der Beugungsringe zu berechnen, ist es erforderlich, die Intensität J (Gleichung (22)) als Funktionen von $\pi - \mu$ darzustellen. Zu diesem Zwecke müssen die A nach den Gleichungen (25) berechnet werden. Diese Gleichungen lassen sich aber nicht ohne weiteres benutzen, da in ihnen der Winkel μ nicht explizit vorkommt. Es muß daher aus den in Tab. 4 berechneten $\pi - \mu$ eine Kurve $f(\alpha)$ gezeichnet werden, aus der die drei zu einem bestimmten μ gehörigen

Werte α auf 10 Sek. genau entnommen werden konnte. Dies wurde durchgeführt für μ in Intervallen von 15 zu 15 Sek. und für die aus der Kurve gefundenen α die Werte für ϵ nach den Gleichungen (2) bestimmt. Durch eine einfache Subtraktion und Addition erhält man dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_1), \quad \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1), \quad \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3), \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3), \quad \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_3), \quad \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_3) \end{aligned}$$

aus denen sich die Werte für Δ ergeben. Aus der Gleichung (22) erhält man durch logarithmische Rechnung die zu einem bestimmten μ gehörige Intensität J . Diese Werte J wurden schließlich als Funktion von $\pi - \mu$ in eine Kurve eingezeichnet, deren Maxima und Minima die Durchmesser der hellen und dunklen Ringe ergeben. Für $a = 5,680$ gibt die Tab. 5 auf p. 218 und 219 den Gang der Rechnung an.

Durch die Kurve $J = f(\pi - \mu)$ ergeben sich dann die in Tab. 6 unter „berechnet“ eingetragenen Winkelhalbmesser der Beugungsringe. Unter „beobachtet“ stehen zum Vergleich die gemessenen Winkelhalbmesser, und unter Messung-Rechnung die Differenz zwischen Messung und Rechnung.

Tabelle 6 ($a = 5,680$).

	berechnet	beobachtet	Messung-Rechnung
Minima.			
I. Ring	0' 21"	0' 49" \pm 5"	+ 28"
II. "	2 6	2 10 \pm 5	+ 4
III. "	3 35	3 34 \pm 10	- 1
IV. "	4 54	4 58 \pm 10	- 4
Maxima.			
I. Ring	1' 6"	1' 35" \pm 5"	+ 29"
II. "	3 5	3 0 \pm 10	- 5
III. "	4 15	4 20 \pm 10	+ 5
IV. "	5 21	5 27 \pm 10	+ 6

In gleicher Weise wie die Tab. 6 sind die Beugungsringe für $a = 5,560$ mm und für $a = 5,300$ mm berechnet worden, für den letzteren Abstand aber nur für den äußeren Teil, da

Tabelle 5

$\pi - \mu$	α_1	α_2	α_3	ε_1	ε_2	ε_3	$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$	$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$
0' 0"	0° 0' 0"	6° 31' 30"	-6° 31' 30"	0° 0' 0"	12° 28' 30"	-12° 28' 30"	3° 15' 50"	3° 15' 50"	14' 20"
15	6 10	28 0	34 40	11 40	21 50	34 30	17 10	10 50	5 10
30	13 0	24 40	38 0	24 40	15 20	41 10	18 50	4 50	35 30
45	20 20	21 10	41 0	38 40	8 40	47 0	20 50	0 30	45 0
1 0	27 30	17 30	44 10	52 20	1 30	53 10	22 30	2 55 0	34 30
15	35 0	13 50	47 0	6 30	11 54 30	58 53	24 30	49 30	24 0
30	42 20	10 0	50 0	20 30	47 0	13 4 0	26 10	43 50	13 20
45	49 40	5 50	52 40	34 20	38 50	9 30	27 50	38 10	2 20
2 0	57 20	1 50	55 20	49 0	31 20	14 40	29 40	32 20	51 10
15	1 5 0	5 57 30	58 0	2 3 40	23 0	19 50	31 15	26 20	39 40
30	12 40	58 10	7 0 40	18 10	14 30	25 0	33 0	20 20	28 10
45	20 30	48 20	3 20	33 10	5 10	30 10	34 30	14 0	16 0
3 0	28 0	43 10	6 0	47 20	10 55 20	25 20	35 40	7 40	4 0
15	35 40	37 30	8 20	3 3' 20	44 20	40 0	36 40	1 50	50 30
30	44 10	31 40	10 40	18 10	33 10	44 40	38 0	1 53 50	37 30
45	54 0	25 40	13 10	36 50	21 40	49 20	39 50	45 30	22 20
4 0	2 2 30	19 10	15 30	53 0	9 10	53 50	40 50	38 20	8 5
15	12 0	11 40	18 0	4 11 10	9 54 40	58 40	41 50	29 50	51 50
30	23 20	4 0	20 20	30 50	40 0	14 3 20	43 50	20 20	34 40
45	35 50	4 54 10	22 30	56 30	21 10	7 30	45 0	9 10	12 20
5 0	49 0	44 20	24 40	5 21 40	2 10	11 40	46 20	0 57 40	50 20
15	6 20	29 20	26 50	54 40	8 33 20	15 50	47 50	21 30	19 20
30	39 10	0 50	29 0	6 57 30	7 28 20	20 10	50 0	10 50	15 30

($a = 5,680$).

$\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$	$\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$	$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$	$\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$	$\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_3)$	$\frac{1}{2}A_{13} + 45$	$\frac{1}{2}A_{13} + 45$	$\frac{1}{2}A_{23}$	J
14' 20"	9° 30' 0"	0° 0' 0"	6° 31' 30"	12° 28' 30"	19° 0' 0"	355°	355°	0°	1,06
5 10	16 0	3 20	31 20	28 10	18 59 30	334	378	44	0,21
15 30	0 20	6 40	31 20	28 10	59 30	312	399	87	0,80
45 0	8 45 30	10 0	31 10	27 50	59 0	293	424	131	5,35
34 30	29 30	13 20	30 50	27 20	58 10	273	448	175	8,90
24 0	13 30	16 40	30 30	26 30	57 0	255	473	218	6,60
13 20	7 57 10	20 0	30 0	25 30	55 30	236	491	255	2,30
2 20	46 30	23 30	29 20	24 10	53 30	218	529	301	0,48
51 10	23 30	26 40	28 40	23 0	51 40	201	544	343	0,19
39 40	6 0	30 30	27 50	21 30	49 20	183	573	390	0,20
28 10	6 48 30	33 50	27 0	19 50	46 50	168	608	440	0,71
16 0	30 0	37 30	25 50	17 40	43 30	153	625	472	2,36
4 0	11 40	41 30	24 40	15 20	40 0	139	657	518	5,34
3 50 30	5 51 30	45 30	23 0	12 10	35 10	125	685	560	4,53
37 30	31 20	49 30	21 10	9 0	30 10	112	713	601	0,56
22 20	7 50	53 50	19 30	5 40	25 10	99	743	644	1,74
8 5	4 46 30	58 10	17 20	1 30	18 50	89	773	684	6,17
51 50	21 40	1 3 10	14 50	11 56 40	11 30	79	806	727	8,78
54 40	3 55 0	8 10	12 10	51 40	2 50	70	837	767	5,58
12 20	21 30	14 10	8 20	44 20	17 52 40	61	871	810	1,00
50 20	2 48 10	20 10	4 30	37 0	41 30	52	897	845	0,87
19 20	1 40 50	28 50	5 58 10	24 40	22 50	47	935	888	4,28
13 30	0 26 20	44 10	44 30	10 54 20	16 39 50	45	959	914	5,71

der innere nicht in Betracht kommt. Die Tab. 7 und 8 geben die Resultate der Rechnung und Messung an.

Tabelle 7 ($a = 5,560$ mm).

	berechnet	beobachtet	Messung-Rechnung
Minima			
I. Ring	0' 58"	0' 46" \pm 5"	-12°
II. "	2 15	1 45 \pm 5	-30
III. "	2 57	2 26 \pm 10	-21
IV. "	3 44	3 33 \pm 10	-11
V. "	4 55	4 56 \pm 10	+ 1
VI. "	5 51	5 54 \pm 10	- 3
VII. "	7 22	6 59 \pm 10	-23
VIII. "	7 50	7 37 \pm 10	-13
IX. "	8 52	8 40 \pm 10	-12
X. "	9 50	9 42 \pm 10	- 8
Maxima			
I. Ring	1' 37"	1' 11" \pm 5"	-26"
II. "	2 35	2 9 \pm 5	-24
III. "	3 17	3 1 \pm 10	-16
IV. "	4 12	4 1 \pm 10	-11
V. "	5 33	5 15 \pm 10	-18
VI. "	6 19	6 13 \pm 10	- 6
VII. "	7 33	7 15 \pm 10	-18
VIII. "	8 24	8 12 \pm 10	-12
IX. "	9 22	9 17 \pm 10	- 5
X. "	10 16	10 14 \pm 10	- 2

Tabelle 8 ($a = 5,300$ mm).

	berechnet	beobachtet	Messung-Rechnung
Minima			
XIV. Ring	12' 48"	12' 38" \pm 10"	-10"
XV. "	14 34	14 27 \pm 10	- 7
XVI. "	15 30	15 25 \pm 10	- 5
XVII. "	16 38	16 28 \pm 10	-10
XVIII. "	18 40	18 31 \pm 10	- 9
XIX. "	20 40	20 33 \pm 10	- 7
XX. "	24 30	24 27 \pm 10	- 3

Tabelle 8 (Fortsetzung).

	berechnet	beobachtet	Messung-Rechnung
Maxima			
XIII. Ring	12'	11' 53" \pm 10"	- 7"
XIV. "	13 40"	13 28 \pm 10	- 12
XV. "	15 8	15 2 \pm 10	- 6
XVI. "	16 6	15 54 \pm 10	- 10
XVII. "	17 40	17 27 \pm 10	- 13
XVIII. "	19 20	19 11 \pm 10	- 9
XIX. "	22 24	22 11 \pm 10	- 13
XX. "	25 43	25 41 \pm 10	- 7

11. Diskussion der Messung und Rechnung.

Vergleichen wir die Resultate, die sich aus Messung und Rechnung ergeben, so bemerken wir eine Übereinstimmung in der Zahl der auftretenden Beugungsringe und in der Größenordnung ihrer Durchmesser. Für die meisten Durchmesser liegen die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung sogar innerhalb der Fehlergrenze. Es ist also das Ergebnis ein äußerst günstiges; denn wir müssen uns vergegenwärtigen, daß die Mascartsche Methode nur eine angenäherte ist, da sie für das Zustandekommen der Interferenz nur drei ausgezeichnete Strahlen, die von den Polen der Wellenlinie ausgehen, benutzt und ferner Zylinderlinsen voraussetzt, während wir sämtliche Messungen mit Kugellinsen durchgeführt haben. Letzteres bedingt vor allem für die Zentralstrahlen eine große Differenz, da hier der Unterschied zwischen Kugel und Zylinder besonders in Betracht kommt, so daß sich die großen Abweichungen zwischen Messung und Rechnung für die inneren Ringe durch die Ungenauigkeit der Methode erklären lassen.

12. Die beiden Ringsysteme.

Die vorigen Abschnitte hatten lediglich die Übereinstimmung der Ringdurchmesser für Messung und Rechnung ergeben, ohne über das Entstehen und Verhalten zweier Ringsysteme, wie sie die Beobachtung zeigt, Auskunft zu erteilen. Eine weitere Rechnung, durchgeführt bis $a = 5,000$, lehrte,

daß die äußersten Ringe stets innerhalb des geometrischen Bogens¹⁾ bleiben. (In Fig. 10 ist der geometrische Bogen für die verschiedenen a durch die punktierte Linie angedeutet.) Es liegt daher der Schluß nahe, daß sich die beiden Ringsysteme ihres Entstehens nach überhaupt nicht unterscheiden. Wie sind sie aber dann zu erklären? Um sich über diese Frage Klarheit zu verschaffen, dienen die nachstehend gezeichneten Wellenlinien.

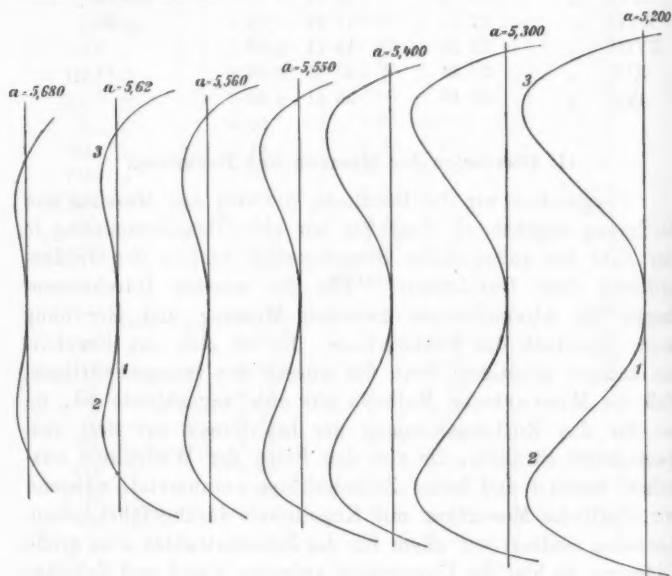


Fig. 10.

Nach Mascart denken wir uns von drei Polen 1, 2, 3 Wellenzüge ausgehen, die durch Superposition Maxima und Minima ausbilden. Gehen wir bei der Betrachtung von kleinen Winkeln $\pi - \mu$ aus, so sehen wir, daß für diese die Phasenunterschiede der Pole 2 und 3 gering sind. Diese beiden Pole können sich demnach nur unterstützen. Die inneren Ringe entstehen dann durch Übereinanderlagerung der Wellen-

1) W. Möbius, *Diss.* I. c.

züge 1 und 2. Wird durch Verkleinerung der Abstand a des Objektivs vom ultramikroskopischen Teilchen die Wellenlinie weiter verzerrt, so ist ein kleinerer Winkel $\pi - \mu$ hinreichend, um die notwendigen Phasenunterschiede für das Zustandekommen eines Maximum bzw. Minimum zu erhalten. Die Ringdurchmesser müssen also kleiner werden. Gleichzeitig wird aber die Wellenlinie stärker verzerrt, woraus folgt, daß sich von außen neue Ringe angliedern. Auf diese Weise erklärt sich das Ringsystem I.

Vergrößern wir nun den Winkel $\pi - \mu$, so entstehen für die Pole 2 und 3 größere Phasendifferenzen. Es beginnt jetzt der Pol 3, der vorher unterstützte, entgegengesetzt zu wirken, so daß schwächere Maxima und hellere Minima auftreten. Geht man nun zu noch größeren Winkeln über, so werden die Phasendifferenzen der Pole 2 und 1 so gering, daß die zugehörigen Ringe im wesentlichen durch die Pole 2 und 3 erzeugt werden. Für solche große Winkel $\pi - \mu$ sind die Krümmungen der Wellenfläche in den beiden Polen wenig verschieden. Es ist daher eine große Zunahme des Winkels $\pi - \mu$ notwendig, um Phasenunterschiede hervorzurufen, die Maxima und Minima ausbilden können. Dieses zweite System muß daher breitere Ringe aufweisen. Es fragt sich nun nur noch, ob diese Ringe nach außen wandern. Um dies zu entscheiden, wollen wir für eine bestimmte Wellenlinie den Winkel $\pi - \mu$ betrachten, für den durch die Pole 2 und 3 gerade der erste innerste Ring erzeugt wird. Verkleinern wir dann den Abstand a , so rücken wegen der zunehmenden Krümmung der Wellenlinie die Pole näher an die Scheitelpunkte der Wellenlinie, der Gangunterschied wird dadurch kleiner, und es bedarf eines größeren Winkels, um den alten Gangunterschied wieder zu gewinnen, d. h. der Ring rückt nach außen.

13. Erklärung der Blendenwirkung.

Auf p. 191ff. habe ich gezeigt, daß Blenden erst bei genügender Kleinheit zu wirken beginnen. Es fragt sich also noch zum Schlusse, wie sich dies erklären läßt.

Bei großen Blenden wird wohl der äußerste Teil der Strahlen abgeblendet, nicht aber die Pole, die die Beugung

im Ultramikroskop hervorrufen. Dies wird aber anders, sobald die Blenden genügend klein sind. Es werden dann nämlich die Pole abgeblendet, die Beugungserscheinungen können nur noch durch Beugung an der Blende entstehen, und es muß sich rechnerisch und experimentell eine Übereinstimmung mit den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen ergeben.

14. Zusammenfassung der Resultate.

1. Die im Ultramikroskop auftretenden Beugungserscheinungen sind nicht bedingt durch die Blenden im Objektiv.

2. Erst durch Einsetzen von kleinen Blenden kann man die komplizierten Beugungserscheinungen beseitigen und Fraunhofersche erhalten.

3. Die Beugungserscheinungen des Ultramikroskops in normaler Benutzung werden in ähnlicher Weise wie die überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen infolge von Deformation der Wellenfläche nach Brechung an einer Kugelfläche erzeugt. Dabei treten Ringe auf, deren Zahl bei Annäherung des Objektivs an das Objekt durch Umlagerung von außen vergrößert und deren Durchmesser verkleinert wird (Ring-system I). Hierzu kommt ein Ringsystem II, das sich von dem ersten durch breitere Ringe unterscheidet, die zugleich bei jener Annäherung im entgegengesetzten Sinne wandern.

Zum Schlusse erwächst mir noch die angenehme Pflicht, Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. Wiener für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für das große Interesse, das er derselben stets entgegengebracht hat, sowie den Herren Privatdozent Dr. Scholl und Dr. Möbius für die zahlreichen Ratschläge bei Durchführung des theoretischen und experimentellen Teiles meinen wärmsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 23. Juli 1909.)

2. Zur Thermodynamik der Gitterbeugung; von M. Laue.

Einleitung.

Seit W. Wiens berühmten Arbeiten über die Thermodynamik der Strahlung¹⁾ hat die Beugung für unumkehrbar gegolten. Dies war auch leicht zu beweisen, solange man das Additionstheorem der Entropie für allgemeingültig ansah, demzufolge die Entropie eines Systems gleich der Summe der Entropien seiner Teile ist. Nimmt man es nämlich an, so hat z. B. in einem durch vollkommene Spiegel begrenzten, ganz evakuierten Hohlraum unter allen möglichen monochromatischen Strahlungsvorgängen von gegebener Energie, Schwingungszahl und spektraler Breite der Zustand die größte Entropie, bei welchem die Energie gleichmäßig über alle Richtungen und alle Teile des Hohlraumes verteilt ist. Augenscheinlich führt aber jede Zerstreuung der Strahlung durch Beugung allmählich diesen Zustand herbei.

Ganz anders liegt die Sache, seit wir wissen, daß zur Berechnung der Entropie die Kohärenzverhältnisse zwischen verschiedenen Teilen des Strahlungsvorganges berücksichtigt werden müssen.²⁾ Die reguläre, absorptionsfreie Spiegelung und Brechung hat sich trotz der Herabsetzung der Temperatur, welche die Strahlung dabei erleidet, als umkehrbar herausgestellt, weil der gespiegelte und der gebrochene Strahl kohärent sind. Die freie Fortpflanzung der Strahlung ist es ebenfalls, so daß kein absorptionsfreier, der geometrischen Optik angehörender Vorgang irreversibel ist. Wie aber steht es mit dem weiten, alle anderen Vorgänge umfassenden Gebiet

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 132. 1894, besonders p. 142.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906; 23. p. 1 u. 795. 1907; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. p. 606. 1907; Physik. Zeitschr. 9. p. 778. 1908; ferner M. Planck, Physik. Zeitschr. 10. p. 62. 1909.

der Beugung? Auch sie macht doch Systeme *kohärenter* Wellen aus Strahlenbündeln. In dem obigen Beispiel ist die gleichmäßige Verteilung der Energie nach Richtungen und Raumteilen noch keineswegs hinreichende Bedingung des Entropie-maximums, vielmehr ist dafür noch ein Minimum von Kohärenz zwischen den verschiedenen Wellen notwendig, und es ist zweifelhaft, ob die Beugung allein dies herbeizuführen vermag.

Bei dieser Frage denken wir zunächst nur an die Beugung an vollkommen spiegelnden oder vollständig durchsichtigen Körpern. Teilweise Absorption der Energie eines Strahlenbündels ist stets unumkehrbar, weil man, was absorbiert ist, nie in einer zum übrig gebliebenen Teil kohärenten Form wiedererhalten kann. Die Beugung an absorbierenden Körpern bewirkt daher zweifellos Entropiezunahme. Nur kann man sich noch fragen, ob diese vielleicht nur ebenso groß ist, als wenn derselbe Bruchteil der Energie bei einem geometrisch-optischen Vorgang absorbiert würde. In diesem Falle ließe sich auch bei absorbierenden Körpern die Beugung in gewissem Sinne als umkehrbar bezeichnen, insofern sie keinen spezifischen Einfluß auf die Thermodynamik des Vorganges hätte.

Bisher ist diese Frage nicht gelöst und sie wird auch im folgenden keine allgemeine Beantwortung finden. Doch ist allem Anschein nach ein Strahlenbündel vermöge seiner einheitlichen Fortpflanzungsrichtung ein so sehr viel geordneterer Vorgang, als die nach vielen, wenn nicht allen Richtungen fortschreitenden Wellen, die bei der Beugung aus ihm entstehen, daß man mit der Annahme der Unumkehrbarkeit wohl kaum fehlgeht.

Nur auf eine Klasse von Erscheinungen, die der geometrischen Optik zweifellos nicht angehört — der Satz vom ausgezeichneten Lichtweg gilt nicht für sie —, trifft diese Kennzeichnung nicht zu. Wenn nämlich, wie beim Gitter, sehr viele gleiche, beugende Elemente äquidistant angeordnet sind, so entstehen nur wenige, mehr oder minder weit voneinander getrennte Strahlenbündel. Von diesen Vorgängen wollen wir zeigen, daß sie mit jeder beliebigen Annäherung umkehrbar sein können. Sollte sich die obige Annahme später wider Erwarten als falsch herausstellen, so wäre dieser Beweis wohl überflüssig gemacht, aber nicht widerlegt.

§ 1. Die Grundlagen des Beweises.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall eines ebenen Gitters, das in ein homogenes, durchsichtiges Mittel eingebettet sein soll. Es fällt auf das Gitter ein monochromatisches, polarisiertes Strahlenbündel von kleiner körperlicher Öffnung und so geringer spektraler Breite, daß es vom Gitter nicht weiter zerlegt wird. Die Art der Polarisierung ist belanglos; es genügt, zu wissen, daß auch alle gebeugten Strahlenbündel polarisiert sind; denn der Polarisationszustand läßt sich umkehrbar beliebig abändern.

In die Richtung der Normalen der Gitterebene legen wir die Z -Achse, in die der Gitterstriche die Y -Achse des zu benutzenden Koordinatensystems. Die Richtung eines Strahles läßt sich dann entweder bestimmen durch Angabe des Einfallswinkels ϑ und der Neigung φ zwischen der Einfalls- und der XZ -Ebene, oder durch zwei der drei Richtungskosinus α , β , γ des Strahles gegen die Koordinatenachsen. Man benutzt zum Übergang von einem zum anderen Verfahren die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \beta = \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \gamma = \cos \vartheta. \end{cases}$$

Den räumlichen Öffnungswinkel ω eines Strahlenbündels findet man bekanntlich, indem man das Integral

$$\omega = \int \int \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

über alle vorkommenden Wellenrichtungen bildet. Nach (1) ist die Funktionaldeterminante von α , β nach ϑ , φ

$$(1a) \quad \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \vartheta \sin \vartheta;$$

daher wird, falls ω klein ist,

$$(2) \quad \omega \cos \vartheta = \int \int d\alpha \, d\beta.$$

Eine einzelne ebene Welle, die aus der Richtung α_0 , β_0 auf das Gitter fällt, gibt nun Anlaß zu einer Reihe anderer

ebenen Wellen, deren Richtungen durch die bekannten Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_h = \alpha_0 + h \frac{\lambda}{a}, \\ \beta_h = \beta_0 \end{cases}$$

gegeben sind, wenn a die Gitterkonstante, λ die Wellenlänge des Lichtes bedeutet, und h alle mit der Bedingung

$$|\alpha_h| \leq \sqrt{1 - \beta_0^2}$$

verträglichen, positiven und negativen, ganzen Zahlenwerte annimmt. Dies gilt sowohl für die „reflektierten“ Wellen, für welche γ entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie γ_0 , als für die hindurchgehenden, für welche γ im Vorzeichen mit γ_0 übereinstimmt. Für die Beugung eines Strahlenbündels folgt aus (3), daß für jedes gebeugte Strahlenbündel $\iint d\alpha d\beta$, also nach (2) auch $\omega \cos \vartheta$ den gleichen Wert hat, wie für das einfallende.

Von den geometrischen Bestimmungsstücken eines Strahlenbündels spielt in der Thermodynamik nur das Produkt $f \omega \cos \vartheta$ eine Rolle, wenn f die unter der Neigung ϑ aus dem Winkel ω beleuchtete Fläche bedeutet. Eigentlich wäre noch das Quadrat des Brechungsindex und die Zeitdauer des Bündels in einem Punkte als Faktoren hinzuzufügen; doch können wir davon absehen, da in diesen Größen alle hier zu betrachtenden Strahlenbündel übereinstimmen. Bei allen geometrisch-optischen Vorgängen bleibt dies Produkt nach dem Sinussatz unverändert. Kohärente Strahlenbündel, die in ihm übereinstimmen, lassen sich daher geometrisch-optisch aus einem einzigen ableiten und zu ihm wieder zusammensetzen. Bei der Gitterbeugung entstehen nun eine Reihe kohärenter Strahlenbündel, die offenbar von derselben Fläche f ausgehen, die das einfallende beleuchtet, und welche nach dem Obigen auch die Größe $\omega \cos \vartheta$ mit ihm gemein haben. Das Ergebnis der Gitterbeugung ist daher geometrisch-optisch sowohl zu erreichen, als rückgängig zu machen.

Damit ist aber die Umkehrbarkeit der Gitterbeugung im Sinne der Einleitung bewiesen. Verläuft sie ohne Absorption, so nimmt die Entropie nicht zu, andernfalls aber nicht mehr, als wenn dieselbe Absorption etwa bei regulärer Spiegelung stattfände.

Doch ist diese Überlegung noch nicht einwandfrei. Zunächst sind die Gleichungen (3) aus der Kirchhoffschen Beugungstheorie abgeleitet, die nur eine Annäherung darstellt für Gitter, bei denen alle in Betracht kommenden Strecken gegen die Wellenlänge groß sind. Ferner entstehen aber auch nach Kirchhoff bei der Beugung nicht nur die in (3) erwähnten Wellen, vielmehr pflanzen sich solche nach allen Richtungen fort und ihre Intensität braucht gegen die der ersteren nicht einmal klein zu sein, wenn ihre Richtung einer Richtung α_h, β_h nahe liegt. Diese Einwände müssen wir noch widerlegen, soll unser Beweis zwingend sein.

§ 2. Ein unendlich großes Gitter.

Das Gitter soll zunächst aus unendlich vielen, unendlich langen Drähten bestehen, welche natürlich einander gleich und äquidistant sein müssen. Ihr Material ist beliebig, ebenso ihr Querschnitt, nur sollen entsprechende Richtungen in ihnen einander parallel gestellt sein. In die Achse eines der Drähte legen wir den Koordinatenanfang, längs der Achsen der anderen ist dann

$$x = m a,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Für die einfallende Welle ist eine Komponente der elektrischen Feldstärke in einer passend gewählten Einheit gleich

$$e^{i\pi \left[t - \frac{1}{c} (x \alpha_0 + y \beta_0 + z \gamma_0) \right]}.$$

Diese Welle erregt in den Drähten elektrische Schwingungen von einer im allgemeinen sehr verwickelten Art. Wir brauchen diese nicht näher zu untersuchen; für uns reicht es aus, daß alle Drähte gleich schwingen, daß sich ferner die Phasen der Schwingungen in entsprechenden Punkten benachbarter Drähte um $\pi a \alpha_0 / c$ unterscheiden und längs der Drähte mit der Geschwindigkeit c / β_0 fortpflanzen; denn beides gilt auch für die erregende Schwingung. Die Schwingungen in den Drähten strahlen nun Energie aus und geben so Anlaß zu den neben der einfallenden Welle auftretenden gebeugten Wellen. (Eine davon überlagert sich der einfallenden Welle und interferiert mit ihr.)

Wir denken uns für den Augenblick die unmittelbare Anregung der Drahtschwingungen durch die einfallende Welle auf den einen Draht beschränkt, für dessen Achse $x = 0$ ist, und von diesem auf ein Stück von der Länge $2b$. In einem Punkte P , dessen Abstand vom Nullpunkt R noch gegen die Dimensionen des Gitters unendlich groß sein soll, und in der Richtung α, β von ihm gesehen wird, wird dann eine (im allgemeinen elliptisch polarisierte) elektrische Schwingung hervorgerufen. Da der Abstand von P von einem anderen Punkte der Gitterebene gleich

$$R - (x\alpha + y\beta)$$

ist, so läßt sich diese Schwingung darstellen durch das Integral

$$\psi(\alpha, \beta) \int_{-b}^{+b} e^{i\gamma \left[\left(t - \frac{y\beta_0}{c} \right) - \frac{1}{c} (R - y\beta) \right]} dy,$$

wobei die Funktion ψ durch die geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Gitters bestimmt ist und auch noch von α_0, β_0 abhängt; denn alle Elemente dy liefern den gleichen Beitrag, nur mit verschiedener Phase. Stücke von derselben Länge auf allen Drähten, für welche m zwischen $-M$ und $+M$ liegt, liefern zusammen den Beitrag

$$(4) \quad \psi(\alpha, \beta) e^{i\gamma \left(t - \frac{R}{c} \right)} \sum_{-M}^{+M} e^{im \frac{\gamma \alpha}{c} (a - a_0)} \int_{-b}^{+b} e^{i \frac{\gamma y}{c} (\beta - \beta_0)} dy$$

zu der Schwingung in P . Die Intensität dieses Beitrages wird, wenn M groß ist, proportional zu

$$(5) \quad |\psi(\alpha, \beta)|^2 M a b \frac{\sin^2 \left(M \frac{\gamma a}{c} (a - a_0) \right)}{M^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma a}{c} (a - a_0) \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\gamma b}{c} (\beta - \beta_0) \right)}{\left(\frac{\gamma b}{c} (\beta - \beta_0) \right)^2}.$$

Um die Strahlung des ganzen Gitters zu finden, muß man hier den Grenzübergang zu $b = \infty$ und $M = \infty$ vornehmen.

Dabei wird aber der Ausdruck (5) Null für alle Werte von α und β , außer für $\beta_h = \beta_0$ und

$$\alpha_h = \alpha_0 + h \cdot \frac{2\pi c}{\gamma a} = \alpha_0 + h \frac{\lambda}{a}.$$

Diese für das unendlich große Gitter strenge Theorie führt daher in der Tat auf die Gleichungen (3), unabhängig davon, wie sich die Gitterkonstante a zur Wellenlänge λ verhält. Die Intensität der verschiedenen Spektren, d. h. die Form der Funktion $\psi(\alpha, \beta)$ können wir freilich nicht so leicht angeben. Doch spielt diese in unseren Betrachtungen nach § 1 keine Rolle. Wesentlich ist dagegen, daß außerhalb der Richtungen α_h, β_h keine Strahlung vom Gitter ausgeht.

Dies zeigt sich in vollster Schärfe, wenn man sich fragt, welcher Bruchteil der gesamten Strahlung nach (5) außerhalb dieser Richtungen liegt, und dann den Grenzübergang vornimmt. Dazu hat man die Größe (5) mit

$$d\alpha d\beta = \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

(vgl. (1a)) zu multiplizieren und einmal über die unmittelbarste Umgebung aller Wertepaare α_h, β_h , das andere Mal über alle anderen Richtungen zu integrieren. Beim Grenzübergang zu $M = \infty, b = \infty$ verschwindet das letztere Integral gegen das erstere wie M^{-1} und b^{-1} .

Durch partielle Integration lassen sich nämlich die dabei auftretenden Integrale von der Form

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx &= -\cotg x \sin^2 nx \\ &+ \frac{n}{2} \int \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} dx, \\ \int \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx &= -\frac{\sin^2 nx}{x} + n \int \frac{\sin 2nx}{x} dx \end{aligned}$$

auf die bekannteren Integrale

$$\int \frac{\sin pu}{\sin u} du \quad \text{und} \quad \int \frac{\sin pu}{u} du$$

zurückführen. Für die letzteren verwendet man häufig semi-konvergente Reihen, in denen der Rest höchstens von derselben Größenordnung wie das letzte beibehaltene Glied ist, nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin pu}{\sin u} du &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos px}{p \sin x} \\ &- \frac{\sin px \cos x - \frac{1}{p} \cos px \sin x}{(p^2 - 1) \sin^2 x} + \dots, \end{aligned}$$

wenn p ungerade und $x < \pi/2$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2 p u}{u} d u = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos 2 p x}{2 p x} - \frac{\sin 2 p x}{4 p^2 x^2} + \dots$$

Es folgt daraus, daß

$$\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n x}{\sin^2 x} d x = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 n x}{x^2} d x = \frac{\pi}{2}$$

ist; integriert man aber nur von 0 bis π/m , wo m eine große, positive, ganze Zahl ist, und versteht man unter n ein großes ganzes Vielfaches von m , so ist bis auf Glieder von der Ordnung n^{-2}

$$\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2 n x}{\sin^2 x} d x = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2 n x}{x^2} d x = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{2 n \pi}.$$

Man erkennt hieraus, daß in diesen Integralen der Einfluß der Integrationsbereiche, in denen keine Nullstelle des Nenners liegt, mit wachsendem n in der Tat wie n^{-1} beim Grenzübergang verschwindet gegen den Beitrag, den die unmittelbare Umgebung dieser Nullstellen (m kann beliebig groß gewählt werden) liefert. Dies Ergebnis überträgt man leicht auf die Integrale

$$\frac{1}{n} \int \varphi(x) \frac{\sin^2 n x}{\sin^2 x} d x \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} \int \varphi(x) \frac{\sin^2 n x}{x^2} d x,$$

wenn φ eine reguläre Funktion ist. Seine Anwendung auf die Integration des Ausdruckes (5) ergibt, daß eine Zerstreuung von Strahlung in die Räume zwischen den Spektren im Grenzfall nicht stattfindet.¹⁾

Endlich mag noch der naheliegende Einwand Widerlegung finden, daß mit zunehmender Zahl der Gitterstriche das Auflösungsvermögen über alle Grenzen wächst, und daß man infolgedessen dabei über die Grenzen der Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes hinausgelangt, insofern man diesen als Satz von

1) Für den Fall, daß a klein gegen λ ist, findet sich dies bestätigt bei H. Lamb, Proc. London. Math. Soc. 29. p. 523. 1898.

der Zunahme der Entropie, nicht aber als Wahrscheinlichkeitsprinzip auffaßt.¹⁾ Beim Gitter hängt nämlich das Auflösungsvermögen auch noch von dem Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenbündels ab und kann nicht über eine gewisse Grenze hinaus wachsen, solange dieser nicht unendlich klein wird.

In dem Grenzfall, daß die Zahl der beleuchteten Gitterstriche, sowie ihre Länge unendlich groß ist, ist die Beugung am Gitter daher umkehrbar.

§ 3. Die zweite Näherung.

Der soeben besprochene Grenzfall ist nicht zu verwirklichen. Zur Fehlerabschätzung gehen wir jetzt in der Näherung einen Schritt weiter, indem wir die Zahl der beleuchteten Gitterstriche $2M$ als eine bestimmte, wenn auch sehr große betrachten; die gesamte Breite des Gitters $2Ma$ soll gegen die Wellenlänge λ groß sein, ebenso die allen Drähten gemeinsame beleuchtete Länge $2b$. Die Gitterfläche ist demnach ein Rechteck vom Inhalt

$$f = 4Mab.$$

Die Aussonderung des Strahlenbündels, welches f beleuchtet, wollen wir uns so bewirkt denken, daß vor dem Gitter ein Schirm liegt, der nur f freiläßt.

Wir können dann nicht mehr wie in § 2 behaupten, daß alle Drähte in gleicher Weise zu Schwingungen angeregt werden. Vielmehr nehmen die äußersten von ihnen eine Sonderstellung ein; desgleichen herrschen an den Drahtenden andere Verhältnisse als in der Mitte. Trotzdem stellt der Ausdruck (5) für die Intensität der vom Gitter ausgehenden Strahlung eine gute Annäherung dar, wenn die Ausnahmen sich auf relativ wenige Drähte und auf kurze Entfernungen von den Enden beschränken. Aus einer aus der Richtung α_0, β_0 einfallenden ebenen Welle werden daher eine Reihe von Wellen entstehen, die sich um die Richtungen

$$\alpha_h^0 = \alpha_0 + \frac{h\lambda}{a}, \quad \beta_h^0 = \beta_0$$

gruppieren. In größerem Abstände von diesen wird keine

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 7. p. 890. 1902.

merkliche Intensität ausgestrahlt, sondern nur in Bereichen, deren Breite mit λ/Ma vergleichbar ist. Innerhalb jeder Gruppe gehorcht die Intensitätsverteilung nach (5) dem Gesetz

$$(6) \quad \frac{\sin^2 \left(M \frac{\nu a}{c} (\alpha_h - \alpha_h^0) \right)}{\left(M \frac{\nu a}{c} (\alpha_h - \alpha_h^0) \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\nu b}{c} (\beta_h - \beta_h^0) \right)}{\left(\frac{\nu b}{c} (\beta_h - \beta_h^0) \right)^2},$$

da man hier

$$\sin \frac{\nu a}{2c} (\alpha_h - \alpha_h^0)$$

durch sein Argument ersetzen kann. Die Phasendifferenz zwischen verschiedenen Wellen derselben Gruppe ist Null, weil der Faktor von

$$e^{i\nu \left(t - \frac{R}{c} \right)}$$

in (4) sich als Summe von Paaren konjugiert komplexer Ausdrücke auffassen läßt.

Im Grenzfall des § 2 konnten wir die Gitterbeugung durch geometrisch-optische Vorgänge ersetzen. Wir mußten dazu an die Stelle des Gitters etwa eine planparallele Platte bringen, das gespiegelte und hindurchgelassene Strahlenbündel wiederum durch Spiegelung und Brechung spalten und so unter Hinzunahme von Hohlspiegeln fortfahren, bis das gewünschte Ergebnis erreicht war, daß eine Reihe von Strahlenbündeln gleiche Flächen f_h in den Richtungen α_h^0, β_h^0 (bestimmt gegen in diesen Flächen festliegende Koordinatensysteme) verlassen.

Jetzt setzen wir noch vor die erste Platte einen Schirm, der nur die Fläche f freiläßt. Es tritt dann Beugung an ihm ein. Die aus der Richtung α_0, β_0 kommende Welle gibt nicht nur zu einer geringen Zahl gespiegelter und gebrochener Wellen Anlaß, sondern zu einer Anzahl Wellengruppen, die sich beim Verlassen der Flächen f_h um die Richtungen α_h^0, β_h^0 scharen. Unmittelbar nach der Beugung gehorcht die Intensitätsverteilung dem Gesetz

$$(7) \quad \frac{\sin^2 M \frac{\nu a}{c} (\alpha - \alpha_0)}{\left(M \frac{\nu a}{c} (\alpha - \alpha_0) \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\nu b}{c} (\beta - \beta_0) \right)}{\left(\frac{\nu b}{c} (\beta - \beta_0) \right)^2}.$$

Bei der Abbildung der Fläche f in die ihr kongruenten Flächen f_h wird aber nach dem Sinussatz

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_h - \alpha_h^0 = \alpha - \alpha_0, \\ \beta_h - \beta_h^0 = \beta - \beta_0. \end{cases}^1)$$

Daher ist die Intensitätsverteilung in den die Flächen f_h verlassenden Gruppen durch den Ausdruck (6) gegeben. Die Phasendifferenzen innerhalb der Gruppen sind aber Null, weil dies bei der Beugung vom Rechteck so ist. Die Beugung am Gitter ist demnach vollständig ersetzt durch geometrisch-optische Vorgänge und die Beugung von einer Öffnung von der Größe der Gitterfläche.

Freilich ist die Kirchhoffsche Formel (7) für die Beugung an einem Rechteck nicht für sehr große Einfallswinkel anwendbar. (Dafür ist sie durch die exakte mathematische Behandlung der Spaltbeugung für senkrechte Inzidenz und sehr lang gestreckte Rechtecke als sehr gute Näherung bewiesen.²⁾) Mit der Einschränkung auf nicht zu schiefe Inzidenz gilt also der Satz: *Die Beugung am rechteckigen Gitter ist der Beugung an einer Öffnung von der Form und Größe der Gitterfläche thermodynamisch äquivalent.* Hinsichtlich der Größenordnung der auftretenden Entropiezunahme dürfte er auch sonst zutreffen.

Diese Entropiezunahme ist nun zweifellos um so kleiner, je größer die Dimensionen der Öffnung sind; daher enthält dieser Satz das Ergebnis des § 2 in sich.

1) Da der Sinussatz meist nur auf körperliche Winkel angewendet wird, sei hier angedeutet, daß α und α_h mit dem Eikonal

$$E(x, y, z; x_h, y_h, z_h)$$

zusammenhängt durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -n\alpha, \quad \frac{\partial E}{\partial x_h} = n\alpha_h$$

(n ist der Brechungsindex), aus denen unmittelbar

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_h} = -\frac{\partial \alpha_h}{\partial x}$$

folgt. Durch Integration findet man hieraus die obigen Gleichungen, da wegen der Kongruenz von f und f_h $\partial x / \partial x_h = -1$ ist.

2) K. Schwarzschild, Math. Ann. 55. p. 177. 1904.

§ 4. Verallgemeinerungen.

Es soll eine sehr große Zahl gleicher und gleichgerichteter beugender Teilchen von beliebiger Form und Größe, sowie aus beliebigem Material auf einer ebenen Fläche f von beliebiger Begrenzung, deren Dimensionen jedoch gegen die Wellenlänge groß sind, schachbrettartig angeordnet sein, d. h. so, daß ihre „Mittelpunkte“ (wie wir diese genauer definieren, bleibe dahingestellt) in einem passend gewählten Koordinatensystem die Koordinaten

$$x = m a, \quad y = n b, \quad z = 0$$

haben; dabei sollen m und n positive oder negative ganze Zahlen sein. Fällt eine ebene Welle aus der Richtung α_0, β_0 auf diese Fläche, so wird in einem weit von ihr entfernten Punkt die Lichtschwingung proportional zu

$$(9) \quad a b \sum_m \sum_n e^{i \left[m \frac{a \nu}{c} (\alpha - \alpha_0) + n \frac{b \nu}{c} (\beta - \beta_0) \right]}$$

(vgl. (4)), wobei m und n alle auf der Fläche f vorkommenden Wertepaare anzunehmen haben. Der Proportionalitätsfaktor ist wiederum eine durch die physikalischen und geometrischen Eigenschaften der Anordnung bestimmte Funktion von α, β und α_0, β_0 .

Summiert man hier das eine Mal zunächst bei konstantem n nach m und bezeichnet man mit M_n die Zahl aller Teilchen mit demselben n , das andere Mal zunächst bei konstantem m nach n , so findet man für (9) die beiden Ausdrücke

$$(10) \quad a b \sum_n \left| \frac{\sin \left(\frac{M_n}{2} \cdot \frac{a \nu}{c} (\alpha - \alpha_0) \right)}{\sin \left(\frac{a \nu}{2 c} (\alpha - \alpha_0) \right)} \right| e^{i \left[n \frac{b \nu}{c} (\beta - \beta_0) + \delta_n \right]},$$

und

$$(11) \quad a b \sum_m \left| \frac{\sin \left(\frac{N_m}{2} \cdot \frac{b \nu}{c} (\beta - \beta_0) \right)}{\sin \left(\frac{b \nu}{2 c} (\beta - \beta_0) \right)} \right| e^{i \left[m \frac{a \nu}{c} (\alpha - \alpha_0) + \delta_m \right]}.$$

δ_n ist dabei das Produkt aus $\nu/c(\alpha - \alpha_0)$ und der Koordinate des Schwerpunkts aller Teilchen mit demselben n , δ_m hat die

entsprechende Bedeutung. Man sieht hieraus, daß die Summe (9) nur in der Nähe der Wertepaare

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_h = \alpha_0 + h \frac{\lambda}{a}, \\ \beta_j = \beta_0 + j \frac{\lambda}{a} \end{cases} \quad \begin{array}{l} h \text{ und } j \text{ ganze} \\ \text{Zahlen} \end{array}$$

von Null wesentlich verschieden ist. Hinsichtlich der Intensitätsverteilung und der Phasendifferenzen als Funktion von $\alpha - \alpha_h$ und $\beta - \beta_j$ sind aber alle diese Stellen gleichwertig, weil man in (9) α_0 und β_0 ohne jede Änderung mit irgend einem α_h und β_j vertauschen kann. Daß die gesamte in einem dieser Gebiete ausgestrahlte Energie noch von α_h, β_j abhängt, ist für das Folgende belanglos.

Für die Umgebung von α_0, β_0 kann man nun in (10) und (11) die beiden im Nenner stehenden Sinusfunktionen mit ihrem Argument vertauschen. Denkt man sich dann die Abstände a benachbarter Teilchen immer kleiner, ihre Zahl aber um so viel größer werden, daß sie immer dieselbe Fläche f bedecken, so bleibt in (10) das Produkt $M_n a$ und die Phase δ_n unverändert, die Abhängigkeit dieser Summe von $(\alpha - \alpha_0)$ und $(\beta - \beta_0)$ bleibt daher dieselbe. Dasselbe gilt von der Summe (9), und zwar auch dann, wenn wir entsprechend b kleiner und kleiner werden lassen. Dabei nähert sie sich nun immer mehr dem Integral

$$\iint dx dy e^{i \left[\frac{xv}{c} (\alpha - \alpha_0) + \frac{yv}{c} (\beta - \beta_0) \right]}$$

gebildet für die Fläche f . Nach Kirchhoff stellt dies aber die Lichtschwingung bei der Beugung an einer Öffnung von der Form von f dar. Daher ist die durch (9) dargestellte Schwingung in der Umgebung von α_0, β_0 völlig identisch mit der bei dem genannten Beugungsvorgang auftretenden.

Setzen wir nun zunächst die Dimensionen der Fläche als unendlich groß gegen die Wellenlänge voraus, so wird ein Strahlenbündel, das aus der Richtung α_0, β_0 kommt, zer-spalten in eine Reihe von Strahlen, welche die Richtungen α_h, β_j haben. In den Integralen $\iint d\alpha d\beta$ stimmen sie nach (12) mit dem einfallenden überein, nach (2) daher auch in den Werten von $f \omega \cos \vartheta$. Dann ist der Vorgang reversibel. In

zweiter Näherung haben für alle durch Beugung entstehenden Strahlenbündel diese Intégrale denselben Wert, aber einen größeren als für das einfallende. Doch zeigt eine Betrachtung analog der des § 3, daß sie sich alle geometrisch-optisch aus einem einzigen ableiten lassen, das (innerhalb der Kirchhoffschen Annäherung) durch Beugung an einer Öffnung von der Fläche f aus dem einfallenden entsteht. Mit Einschränkung auf nicht zu schräge Inzidenz gilt daher: *Die Beugung an vielen, gleichen, auf einer ebenen Fläche f schachbrettartig angeordneten Teilchen ist thermodynamisch der Beugung an einer Öffnung von der Form und Größe der Fläche f gleichwertig.* Sofern es nur auf die Größenordnung der Entropiezunahme ankommt, dürfte er wohl von dieser Beschränkung frei sein. Wird zugleich dabei Strahlung absorbiert, so muß man natürlich vor oder nach der Beugung am Schirm noch geometrisch-optisch dieselbe Absorption stattfinden lassen, um zu einem äquivalenten Prozeß zu kommen.

Dies Ergebnis ist aber noch weiterer Verallgemeinerung fähig. Man übersieht leicht, daß es sich auf Gitter von beliebiger Begrenzung, auf ebene Anordnungen wie

$$x = ma, \quad y = nb + md, \quad z = 0,$$

sowie auf ähnliche räumliche Verteilungen anwenden läßt, ohne daß mit dieser Aufzählung die ganze Fülle von Möglichkeiten erschöpft sein soll. Auch wenn kleine, gesetzmäßige Abweichungen von der genauen Äquidistanz aller beugenden Elemente auftreten, wird es sich noch vielfach anwenden lassen. Periodische Gitterfehler rufen z. B. neben den eigentlichen Spektren sogenannte Geister hervor, deren Lage durch Gleichungen von der Form

$$\alpha = \alpha_0 + \text{const.}, \quad \beta = \beta_0$$

bestimmt ist¹⁾; diese leisten aber dieselben Dienste, wie die Gleichungen (3). Freilich muß dazu die Gitterkonstante groß sein, denn sonst trifft die Voraussetzung der Gleichberechtigung aller Gitterstriche nicht mehr zu. Schließlich scheint mir auch die bekannte Tatsache, daß Kreisgitter, bei denen die Radien der Striche sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{4}$ usw. verhalten,

1) Henry A. Rowland, Phil. Mag. (5) 35. p. 397. 1893.

geometrisch-optische Abbildung liefern¹⁾, für die Möglichkeit zu sprechen, das obige Resultat sinngemäß zu übertragen.

Folgerungen.

Wir schließen nun diese Betrachtungen: Die Beugung ist — nach unserer Annahme — im allgemeinen unumkehrbar. Unregelmäßige Anordnung vieler, gleicher, beugender Körper zerstreut die Strahlung in derselben Art wie ein einzelner, nur viel stärker, vergrößert daher die Entropie noch viel mehr. Ordnet man die Teilchen dagegen nach einfachen Regeln gesetzmäßig an, so kann man durch Vergrößerung ihrer Zahl die Entropiezunahme durch Beugung unter jedes Maß hinunterdrücken. Dies paßt vortrefflich zu der Auffassung des Entropieprinzips als eines auf Ungeordnetheit beruhenden Wahrscheinlichkeitssatzes.

Der Grad der Annäherung, mit dem man die Beugung an einem solchen System als umkehrbar betrachten kann, hängt freilich nicht allein von diesem, sondern auch von der Größe und Form der körperlichen Öffnung des einfallenden Strahlenbündels ab. Zwar wird aus jeder Welle ein Strahlenkegel von endlicher Öffnung; ist die des Strahlenbündels aber wesentlich größer und von geeigneter Form, so kann es vorkommen, daß das Integral $\iint da d\beta$, d. h. auch das Produkt $\omega \cos \vartheta$ nicht merklich zunimmt; dann aber ist der Vorgang so gut wie reversibel, während er bei engeren Bündeln erheblich irreversibel sein kann. Auf's Gitter angewandt heißt dies: bei breitem Kollimatorsplatt ist die Beugung umkehrbar, bei schmalem nicht. Das Auflösungsvermögen wird nun allein dann ausgenutzt, wenn das geometrisch-optische Spaltbild schmal ist gegen den Abstand der mittelsten Nullstellen im Beugungsbild, wie es von einer einzelnen Welle herrühren würde. Erzwingt man daher die äußersten spektroskopischen Leistungen, so ist der Vorgang unumkehrbar.

München, Juli 1909.

1) A. Winkelmann, Handbuch 6. p. 1021. 1906.

(Eingegangen 7. Juli 1909.)

**3. Quantitative Bestimmung
der anomalen Dispersion des Lichtes
in gesättigtem nicht leuchtendem Natriumdampfe
von der Temperatur 385° C.;
von Stanisław Loria.**

(Gekürzter Auszug aus dem „Bulletin de l'Academie des sciences de Cracovie“, Juni 1909, p. 40—60.)

I. Einleitung.

§ 1. Die bisherigen Untersuchungen der Dispersion des Lichtes in leuchtendem und nichtleuchtendem Natriumdampfe¹⁾ bestätigen die Überzeugung, daß in *qualitativer* Hinsicht die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung für befriedigend gehalten werden kann. In *quantitativer* Beziehung dagegen weist das vorhandene Beobachtungsmaterial manche schwerwiegende Lücken auf. So ist es z. B. unmöglich, über die Dichte des Dampfes in den verwendeten Flammen etwas Sicheres auszusagen; auch den brechenden Winkel des Dampfprismas, das bei der Methode der gekreuzten Prismen zur Verwendung gelangt, können wir nicht mit genügender Genauigkeit bestimmen; endlich schweben wir noch in völliger Unkenntnis, ob das Leuchten einer Natriumflamme als Elektrotemperaturstrahlung) oder Chemiluminiszenz aufzufassen ist.

§ 2. In der Arbeit Woods liegt unleugbar der erste rationelle Versuch einer exakten Lösung des Problems vor. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen verlieren jedoch ihren Wert für die Theorie, wenn man bedenkt, daß auch bei ihm die Dichte des Dampfes unbekannt war. Die Woodschen Messungen beziehen sich auf die Temperatur 644° C. Die Dichte des gesättigten Dampfes dagegen ist von Jewett²⁾ nur zwischen den Temperaturen 360° und 420° C. bestimmt worden.

1) Betreffs der Literaturangaben vgl. oben zitierte ausführliche Abhandlung.

2) F. B. Jewett, Phil. Mag. 4. p. 546. 1902.

Außerdem darf man nicht vergessen, daß, wenn es sich um eine exakte Prüfung der theoretischen Formeln handelt, nicht allen von Wood angegebenen Brechungsexponenten derselbe Wert in bezug auf Genauigkeit beigelegt werden kann. Diejenigen Brechungsexponenten nämlich, welche sich auf Wellenlängen beziehen, die dicht in der Nähe und zwischen den Absorptionslinien liegen, wurden mit der Methode der gekreuzten Prismen bestimmt. Das Gewicht aller so erhaltenen Werte ist zweifellos kleiner als dasjenige der absolut gemessenen.

Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß Wood nur die theoretisch unwahrscheinliche, eingliedrige Dispersionsformel mit der Erfahrung verglichen hat. Er ist zwar der Meinung, eine genügende Übereinstimmung nachgewiesen zu haben. Eine sorgfältige Nachprüfung seiner Rechnungen erlaubt jedoch nicht, dieser Meinung beizutreten, und ein Versuch, die exaktere und zweckmäßigere, zweigliedrige Dispersionsformel auf die Woodschen Messungen anzuwenden, fällt — wie Natanson¹⁾ gezeigt hat — völlig ungenügend aus.

In Anbetracht des großen theoretischen Interesses, welches henzutage die optischen Eigenschaften des nichtleuchtenden Natriumdampfes darbieten, habe ich den Versuch unternommen, eine möglichst exakte Messung seiner Dispersion im sichtbaren Spektrum bei bekannter Dichte und Temperatur auszuführen.

II. Methode und Versuchsanordnung.

§ 3. Bei der Wahl der best entsprechenden Untersuchungsmethode mußte der von Wood²⁾ betretene Weg von vornherein gemieden werden, weil eine Messung bei verhältnismäßig geringer Dichte notwendig war. Der Woodsche Versuch lehrt dagegen, daß in der Nähe von etwa 380° C. und bei Verwendung monochromatischen Lichtes der gelben (D_3) Heliumlinie nicht mehr als acht durchs Fadenkreuz wandernde Streifen gezählt werden konnten. Seine Methode war daher für unseren Zweck entschieden zu wenig empfindlich.

1) W. Natanson, Bull. de l'Ac. d. Sc. de Cracovie, Avril 1907. p. 330.

2) R. W. Wood, Phil. Mag. S. p. 324. 1904.

Als unvergleichlich zweckmäßiger erwies sich die heutzutage empfindlichste, zum erstenmal von L. Puccianti¹⁾ vorgeschlagene Methode, die auch schon von R. Ladenburg und dem Verfasser²⁾ zur Messung anomaler Dispersion in leuchtendem Wasserstoff mit Vorteil benutzt wurde. Sie beruht auf der Verwendung horizontaler Interferenzstreifen im kontinuierlichen Spektrum, deren Verlauf unmittelbar die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge widerspiegelt und daher äußerst empfindlich auf jede sprunghafte Änderung der Dispersion reagiert.

Der optische Teil der benutzten Versuchsanordnung war im wesentlichen mit derjenigen identisch, die ich in einer früheren Arbeit³⁾ beschrieben habe. Es wurde auch dasselbe Michelsonsche Interferometer verwendet, dessen Spiegel und Platten jedoch so justiert waren, daß im beobachteten kontinuierlichen Spektrum scharfe *horizontale* Interferenzstreifen erschienen.⁴⁾

§ 4. Die eigentliche Messung geschah mit Hilfe eines mikrometrisch verschiebbaren Okularfadens. Außer dem in Fernrohren üblichen unbeweglichen Fadenkreuze befand sich noch im Okular ein horizontal aufgezogener und vertikal verschiebbarer Doppelfaden. Stellte man nun den vertikalen, unbeweglichen Faden des Kreuzes auf eine bestimmte Wellenlänge ein, so konnte man seinen zweiten festen Arm zur Koinzidenz mit dem scharfen Interferenzminimum bringen und zuerst mit Hilfe des verschiebbaren Fadens den Abstand zweier benachbarter Minima an dieser Stelle des Spektrums ausmessen. Brachte man nun in den Weg eines der interferierenden Strahlen Natriumdampf, so verbog sich in der Nähe der Absorptionsgebiete das vorhin horizontale Minimum und nahm die bekannte Gestalt der anomalen Dispersionskurve an. Das Bild der Erscheinung sah dann so aus, wie es in Fig. 1 gezeichnet ist.

1) L. Puccianti, Mem. della Soc. degli Spettroscopisti Italiani 32. p. 133. 1904; Reale Acc. dei Lincei 33. p. 26. 1906.

2) R. Ladenburg u. St. Loria, Physik. Zeitschr. 9. p. 875. 1908.

3) St. Loria, Ann. d. Phys. 29. p. 614. 1909.

4) Näheres in der Originalabhandlung.

An den Stellen des Spektrums, die den Wellenlängen:

$$\lambda_{01} = 5,896 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

$$\lambda_{02} = 5,890 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

entsprechen, tauchten zwei scharfe Absorptionslinien auf. Links von der Absorptionslinie D_1 , d. h. an der Seite der längeren Wellen, verbog sich das Interferenzminimum nach oben, rechts von der Absorptionslinie D_2 , im Gebiete der kürzeren Wellen, bildete sich eine ähnliche Verbiegung nach unten.

Da das Interferometer in die Nulllage gebracht worden war und beide Rohre R_1 und R_2 auf möglichst hohem Vakuum gehalten wurden, so war anfangs für alle Wellen der Brechungs-exponent $\nu = 1$. Das durch das ganze Spektrum hindurchlaufende, horizontale Interferenzminimum gab ein deutliches Bild von eben diesem geradlinigen Verlauf der Dispersion. Man konnte sich leicht überzeugen, daß die oben beschriebene, durch den Dampf hervorgerufene Verzerrung des Streifens im roten Teile des Spektrums einer kontinuierlichen Erhöhung ($\nu > 1$), im violetten einer kontinuierlichen Verminderung ($\nu < 1$) des Brechungs-exponenten entspricht.

§ 5. Um also die gewünschte Messung durchzuführen, brauchte man nur die beobachtete Figur im rechtwinkligen

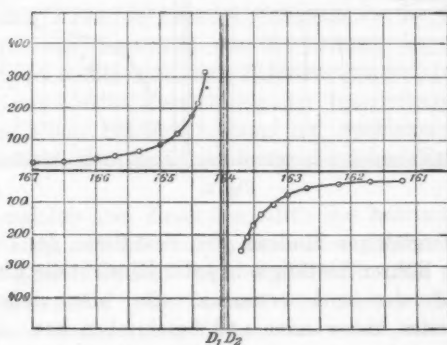


Fig. 1.

Koordinatensysteme abzubilden, indem man als Abszissen die aus der Auflösung des Apparates bekannten Wellenlängen, als Ordinaten die Verschiebungen aufträgt, welche nötig waren,

um den beweglichen Faden wieder zur Koinzidenz mit dem verbogenen Minimum zu bringen. Aus diesen beobachteten Größen berechnet man leicht die Brechungsexponenten, wenn man bedenkt, daß an jeder Stelle des Spektrums die Verschiebung um eine Streifenbreite einer Änderung des Exponenten um $\pm \lambda/l$ entspricht, wenn λ die Wellenlänge, l die doppelte Länge der Dampfschicht (20 cm) bedeutet.

Fig. 1 gibt ein treues Bild der gesehenen Erscheinung; das Koordinatensystem ist aus unmittelbar beobachteten Verschiebungen an der Teilung des Spektralapparates einerseits (Abszissen) und an der des Okularmikrometers andererseits (Ordinaten) gebildet. Auf der Trommel dieser Mikrometerschraube konnte man den $1/50$ Teil einer Umdrehung ablesen und den $1/100$ Teil bequem schätzen.

Fig. 2 gibt den wirklichen Verlauf der Brechungsexponenten als Funktion der Wellenlänge wieder.

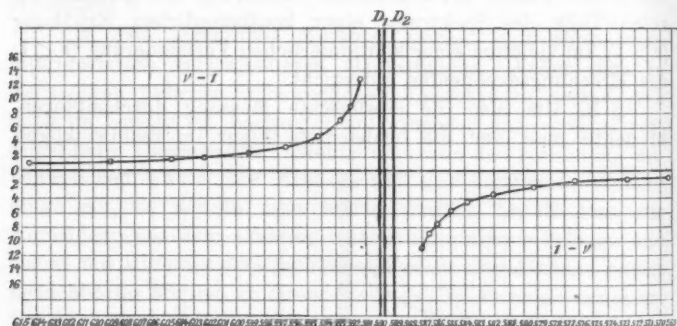


Fig. 2.

§ 6. Sorgfältiges Studium des Verhaltens des Dampfes in evakuierten Röhren bestätigte in jeder Hinsicht die Erfahrungen von Wood, der zum erstenmal alle hier vorkommenden Schwierigkeiten überwunden und beschrieben hat. Indem ich mich also auf die schon zitierte Abhandlung dieses Forschers berufe, möchte ich nur einige ergänzende Bemerkungen hinzufügen.

Um dieselbe Messung mehrmals nach Belieben unter denselben Bedingungen der Temperatur und Dichte und bei An-

wesenheit einer genügenden Menge geschmolzenen Natriums wiederholen zu können, sah ich mich genötigt, das von Wood empfohlene, jedoch leicht zerspringende Glasrohr durch ein Rohr aus geschmolzenem, durchsichtigem Quarz zu ersetzen. Dieses¹⁾ 45 cm lange und ca. 3 cm weite Rohr, dessen Enden kragenförmig umgebogen und gut abgeschliffen waren, konnte durch planparallele Glasplatten mittels sogenannten „Picein“-Kitts luftdicht verschlossen werden. Das Rohr war mit zwei Ansätzen versehen, deren einer mit der Luftpumpe verbunden war, während der andere zur Zuführung des Thermoelementes in die Mitte der Dampfschicht dienen sollte. Der mittlere Teil des Rohres war auf der Länge von 10 cm mit einer dünnen Asbestschicht bedeckt. Auf dieser Unterlage wickelte man eine Spirale aus dünnem Konstantandraht auf, die zur elektrischen Heizung des im Rohr liegenden metallischen Natriums diente. Die Beobachtung Woods nämlich, daß der mittels einer Stromspirale gebildete Dampf nur in der geheizten Partie des Rohres als solcher verbleibt und daher eine gleichmäßige, verhältnismäßig scharf abgegrenzte Säule bildet, hat sich vollkommen bestätigt.

Wäre der Dampf in irgendwelcher Weise ungleichmäßig geschichtet, was man wohl erwarten sollte, da er sich im dynamischen Zustande befindet, langsam in die kalten Teile des Rohres destilliert und der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt, so müßte sich diese Schichtung sofort in einer Verzerrung, wenn nicht Vernichtung der Interferenzstreifen und einer deutlichen Schlierenbildung im Spektrum offenbaren. Demgegenüber war keine Andeutung solcher Erscheinungen zu sehen.

Wenngleich also dieses Verhalten des Natriumdampfes zu den noch nicht aufgeklärten physikalischen Eigenschaften dieser Substanz gehört, so muß man es einstweilen als unmittelbare Erfahrungstatsache gelten lassen und kann vielleicht in ihr eine gewisse Berechtigung finden, von einer definierten Länge und Dichte der Dampfsäule zu sprechen. Solange wir nicht über eine Substanz verfügen, die sowohl durchsichtig wie auch gegen die Einwirkung des Natriums widerstandsfähig wäre,

1) Bezogen von der Firma W. C. Haereus, Hanau.

ist eine exaktere Behandlung aller Fragen, in welchen die Länge der Dampfsäule eine Rolle spielt, ausgeschlossen.

Wohlgemerkt wirkt ein etwaiger Fehler in der Schätzung dieser Länge gleichmäßig auf alle beobachteten absoluten Werte, fällt daher bei der eigentlichen *Dispersion* fort.

Zur Messung der Temperatur des gesättigten Dampfes diente ein Thermoelement aus Eisen und Konstantan mit silberner Lotstelle und ein Zeigergalvanometer. Da die Erfahrungen von Zickendraht¹⁾ erwiesen haben, daß ein solches Thermoelement vom Natriumdampfe mit der Zeit angegriffen wird, wurde es in einer dünnen Glashülle in das Rohr R_1 hineingeführt. In derselben Hülle natürlich war es vor und nach jeder Messungsreihe in Zinn, Blei, Zink und Aluminiumbädern geeicht.

§ 7. Zwei wichtige Fehlerquellen mußten von vornherein auf ihre Bedeutung hin geprüft und unschädlich gemacht werden. Die erste bestand in dem Einfluß des okkludierten und freigegebenen Wasserstoffs; die zweite ergab sich aus der Versuchsanordnung und beruhte darauf, daß man den eisernen Unterbau des Interferometers vor jeder geringsten Erwärmung schützen mußte.

Die störende Wirkung der ersteren Fehlerquelle kam bei der Methode der horizontalen Streifen nicht so stark zur Geltung, wie es bei der Woodschen Versuchsanordnung der Fall war. Sie mußte sich nämlich, sobald sie da wäre, gleich darin offenbaren, daß die horizontalen Streifen eine schräge Richtung einnehmen, eine Veränderung, die momentan bemerkt und von der der Anomalie eigentümlichen Verzerrung unterschieden werden konnte.

Mit Hilfe eines in der Zuleitung zur Pumpe angeschmolzenen Geisslerrohres konnte man sich in der Tat überzeugen, daß Spuren von Wasserstoff jedesmal bei der Erwärmung frei werden. Aber auch der dadurch hervorgerufene Fehler, der schon an und für sich klein war, konnte vollständig beseitigt werden. Im zweiten Arm des Interferometers wurde nämlich ein zweites ebenfalls 45 cm langes mit planparallelen Platten luftdicht verschlossenes Rohr angebracht. Dieses Rohr, das

1) H. Zickendraht, Physik. Zeitschr. 9. p. 593. 1908.

einerseits an die Pumpe angeblasen war, stand noch durch eine kurze Zuleitung mit dem Quarzrohr in ständiger Verbindung. Der vom Metall freigegebene Wasserstoff konnte sich daher ungehindert auf beide Rohre gleichmäßig verteilen, während der Natriumdampf an der geheizten Stelle haftete. Durch diese automatische Kompensation erreichte man es auch, daß die farbigen Interferenzstreifen während der ganzen Messung auf dem Spalte des Spektralapparates unverändert verblieben. Das war ein Zeichen, daß die Nullstellung des Apparates in der Tat beibehalten wurde, und gab die Gewißheit, daß das im Okular beobachtete Phänomen der anomalen Dispersion des Na-Dampfes wirklich rein war. Die zweite der erwähnten Fehlerquellen wurde mittels einer geeigneten Kühlvorrichtung beseitigt.¹⁾

§ 8. Nicht unbeträchtliche technische Schwierigkeiten hatten ihren Ursprung darin, daß es unmöglich war, den Dampf längere Zeit hindurch in gleicher Temperatur zu halten. Man mußte daher die Messung während der Entwicklung der Erscheinung ausführen lernen. Dies geschah auf folgende Weise:

Sobald die beiden Rohre R_1 und R_2 so weit ausgepumpt worden waren, daß im angeschmolzenen Geisslerröhrchen alles Gasleuchten verschwunden ist, wurde der Strom geschlossen und sowohl der langsam sich bewegende Zeiger des Galvanometers wie auch das Verhalten der Interferenzstreifen beobachtet. Bei verhältnismäßig niedriger Temperatur, unterhalb 200°C ., zeigten sich schon die ersten Spuren der Anomalie. Die Erscheinung war dann ganz ähnlich wie diejenige, die Ladenburg und ich bei leuchtendem Wasserstoff im Geisslerrohr beschrieben haben. Schritt für Schritt mit dem Anwachsen der Temperatur und der Dichte des Dampfes wurden auch die Abweichungen der Interferenzstreifen von ihrer ursprünglichen Lage immer größer und die beiden anfangs nur schwach angedeuteten Absorptionslinien D_1 und D_2 traten immer deutlicher und schärfer hervor.

Während dieses ganzen Prozesses verfolgte der Beobachter den sich ablenkenden Interferenzstreifen mit dem verschiebbaren Okularfaden, indem er den Schnittpunkt desselben

1) Betreffs ihrer Beschreibung vgl. das „Bulletin“.

mit dem Vertikalfaden des Kreuzes auf der ursprünglichen Stelle des Minimums festzuhalten suchte. Durch geeignete Stromregulierung konnte man bei einer Temperatur zwischen 380° und 390° C. den Gang der Erscheinung für verhältnismäßig längere Zeit zur Ruhe bringen. Bei 385° C. wurden daher die meisten Messungen ausgeführt.

Es sind im ganzen 20 Brechungsexponenten für ebensoviel Wellenlängen bestimmt worden, wobei jede Bestimmung mehrmals unter denselben Bedingungen wiederholt wurde.

III. Bereich und Ergebnisse der Messungen.

§ 9. Die Messungen wurden im Bereiche des sichtbaren Spektrums in den Grenzen zwischen $\lambda = 6,145 \cdot 10^{-5}$ cm und $\lambda = 5,693 \cdot 10^{-5}$ cm ausgeführt. In diesem Spektralbezirke ist die Dispersion des Natriumdampfes aller Wahrscheinlichkeit nach nur durch die den beiden Linien D_1 und D_2 entsprechenden Eigenschwingungen bestimmt. Es wäre zweifellos sehr wünschenswert gewesen, auch diejenigen Brechungsexponenten kennen zu lernen, die den in allernächster Nachbarschaft der Absorptionslinien liegenden Wellenlängen entsprechen. Nach vielen erfolglosen Bemühungen mußte ich jedoch davon absehen, da es sich leider in meinen Versuchsbedingungen als durchaus unmöglich herausgestellt hat.

Schon Wood hat die Erfahrung gemacht, daß eine absolute Bestimmung der Dispersion in allernächster Nähe der Absorptionsgebiete unmöglich ist wegen allzu rascher Veränderlichkeit des Brechungsexponenten mit der Wellenlänge. In seinen Versuchsbedingungen stellte sich die Verschiedenheit der Wellen- und Gruppengeschwindigkeit störend in den Weg¹⁾; bei Verwendung horizontaler Interferenzstreifen tauchte dieselbe Schwierigkeit in einer anderen Form auf. Solange nämlich der Dampf noch dünn war, konnte man bequem auch diesen Teil der Interferenzstreifen verfolgen, welcher zwischen den beiden Absorptionslinien lag. Man sah, wie er sich schnell verzerrte und die Gestalt eines Integralzeichens annahm. Jedoch bei der Temperatur von etwa 380° C. war schon von

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 8. p. 324. 1904. Note bei Lord Rayleigh, ebenda p. 330.

diesem Bilde nichts mehr zu sehen. Hingegen erschien der ganze Bezirk zwischen den Absorptionslinien, wie auch die etwa auf 20 A.-E. sich erstreckenden Gebiete des Spektrums, links von der Linie D_1 und rechts von der Linie D_2 , von zahlreichen, äußerst feinen und kaum erkennbaren vertikalen Streifen durchzogen, die den Absorptionslinien ganz parallel verliefen.

Die Anwendung eines Rowlandschen Gitters von etwa doppelt so starkem Auflösungsvermögen im dritten Spektrum wie das der benutzten Prismen veränderte nichts an diesem Sachverhalt und vergrößerte nur die Schwierigkeit der Messung, da man wegen der Lichtschwäche zu einer Bogenlampe Zuflucht nehmen mußte.

Aus obigen Gründen mußte ich mich mit Messungen begnügen, die nicht näher an das Absorptionsgebiet heranreichen, als zu den Wellenlängen $5,912 \cdot 10^{-5}$ cm auf der roten und $5,870 \cdot 10^{-5}$ cm auf der blauen Seite des Spektrums.

§ 10. Die endgültigen Ergebnisse dieser mehrmals unter denselben Bedingungen wiederholten Messungen sind zahlenmäßig in Tab. I, graphisch in Fig. 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle I.

λ in 10^{-5} cm	Ablenkung in Skala der Mikrometerschraube	$\nu - 1$
6,145	23,2	$1,018 \cdot 10^{-}$
6,089	29,6	1,288
6,045	38,0	1,640
6,022	44,8	1,927
5,990	59,4	2,541
5,965	79,8	3,40
5,942	117,3	4,98
5,926	173,6	7,35
5,920	212,3	8,98
5,912	305,7	12,91
—	—	$1 - \nu$
5,870	256,9	10,77
5,865	209,3	8,77
5,860	176,5	7,39
5,850	134,7	5,68
5,839	106,7	4,45
5,820	78,4	3,25
5,796	58,9	2,44
5,762	43,5	1,79
5,725	33,7	1,38
5,698	28,0	1,15

IV. Vergleich der Theorie mit den Ergebnissen der Erfahrung.

§ 11. Um die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, kann man — wie in der ausführlichen Abhandlung auf Grund der Analyse der Versuchsbedingungen gezeigt wird — die Gleichung

$$(1) \quad \nu - 1 = \sum \frac{M \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

benutzen.

Machen wir die vorläufige Annahme, der Natriumdampf sei eine *mono-elektronische* Substanz, deren Eigenschwingung in der Mitte zwischen den beiden *D*-Linien liegt. Setzt man in die Gleichung (1)

$$\lambda_0^* = 5,893 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

ein und läßt das Summationszeichen weg, so erhält man:

$$M = 8,22 \cdot 10^{-8}$$

und kann mit Hilfe dieser Größe die theoretischen Werte $\nu - 1$ berechnen. Wie aus Tab. II zu ersehen ist, stimmen sie ziemlich gut mit den beobachteten überein.

Tabelle II.

λ in 10^{-8} cm	$\nu - 1$ (beob.)	$\nu - 1$ (ber.)
6,145	$1,018 \cdot 10^{-6}$	$1,023 \cdot 10^{-6}$
6,089	1,283	1,295
6,045	1,640	1,656
6,022	1,927	1,943
5,990	2,541	2,560
5,965	3,40	3,433
5,942	4,98	5,012
5,926	7,55	7,420
5,920	8,98	9,059
5,912	12,91	12,94
—	$1 - \nu$ (beob.)	$1 - \nu$ (ber.)
5,870	$10,77 \cdot 10^{-6}$	$10,45 \cdot 10^{-6}$
5,865	8,77	8,568
5,860	7,39	7,275
5,850	5,63	5,57
5,839	4,45	4,42
5,820	3,25	3,252
5,796	2,44	2,435
5,762	1,79	1,786
5,725	1,38	1,38
5,693	1,15	1,149

§ 12. Man muß jedoch bedenken, daß die der obigen Rechnung zugrunde liegende Voraussetzung, der Natriumdampf sei in optischer Hinsicht eine *mono-elektronische* Substanz, an und für sich sehr unwahrscheinlich ist. Ja schon ein flüchtiger Blick auf die Erscheinung genügt, um sich von der ungleichen Wirkung beider Absorptionslinien zu überzeugen. Von einer Kontrolle der Theorie kann daher nur dann die Rede sein, wenn die vollständige zweigliedrige Dispersionsformel mit den Eigenschwingungen

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_{01} = 5,896 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \\ \lambda_{02} = 5,890 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \end{cases}$$

zur Anwendung gelangt.

Nach dem von Natanson¹⁾ angegebenen Rechnungsschema schreiben wir:

$$(2) \quad \alpha_1 = \frac{e_1^2 N_1}{8 \pi c^2 m_1}, \quad \alpha_2 = \frac{e_2^2 N_2}{8 \pi c^2 m_2}$$

und führen die H. A. Lorentzsche Gleichung in die Form:

$$(3) \quad R = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$$

über, wobei den Buchstaben R , L_1 , L_2 folgende Bedeutung beizulegen ist:

1. für $\lambda < \lambda_{02}$

$$(4) \quad R = \frac{1 - \nu^2}{2 + \nu^2}, \quad L_1 = \frac{\lambda_{01}^2 \lambda^2}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2}, \quad L_2 = \frac{\lambda_{02}^2 \lambda^2}{\lambda_{02}^2 - \lambda^2}.$$

2. für $\lambda > \lambda_{01}$

$$(5) \quad R = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2}, \quad L_1 = \frac{\lambda_{01}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{01}^2}, \quad L_2 = \frac{\lambda_{02}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{02}^2}.$$

Bezeichnen wir

$$(6) \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \beta, \quad \frac{R}{L_1 + L_2} = Y, \quad \frac{L_2}{L_1 + L_2} = X,$$

so können wir die Gleichung (3) in der Form:

$$(7) \quad Y = \alpha_1 + \beta X$$

darstellen. Trägt man also die Werte X und Y aus Tab. III in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhält man eine Reihe von Punkten, die in der Tat um eine Gerade herum schwanken (vgl. Fig. 8).

1) W. Natanson, l. c.

Tabelle III.

λ in 10^{-5} cm	$\nu - 1$	X	Y
6,145	$1,018 \cdot 10^{-6}$	0,4937	7,85
6,089	1,283	0,4920	7,84
6,045	1,640	0,4899	7,82
6,022	1,927	0,4881	7,83
5,990	2,541	0,4843	7,83
5,965	3,40	0,4789	7,80
5,942	4,98	0,4693	7,80
5,926	7,35	0,4540	7,75
5,920	8,98	0,4445	7,73
5,912	12,91	0,4204	7,68
—	$1 - \nu$	—	—
5,870	$10,77 \cdot 10^{-6}$	0,5640	8,01
5,865	8,77	0,5527	7,98
5,860	7,89	0,5448	7,95
5,850	5,63	0,5343	7,94
5,839	4,45	0,5272	7,92
5,820	3,25	0,5200	7,90
5,796	2,44	0,5150	7,90
5,768	1,79	0,5110	7,90
5,725	1,38	0,5085	7,88
5,693	1,15	0,5071	7,87

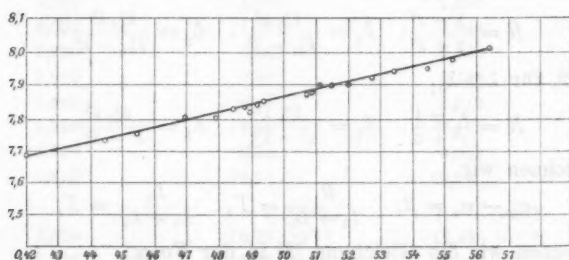


Fig. 3.

Die Richtung dieser Geraden ist, wie man aus der Zeichnung ersieht, durch die Koordinaten der Punkte:

$$X_1 = 0,4204; \quad Y_1 = 7,68,$$

$$X_2 = 0,5640; \quad Y_2 = 8,01$$

festgelegt. Es zeigt sich also, daß $\beta > 0$, d. h. $\alpha_2 > \alpha_1$ ist. Diese Tatsache hat schon Natanson¹⁾ vermutet, nachdem er eine ganz ähnliche Berechnung auf Grund der Woodschen Tabelle durchgeführt hatte. Jedoch lagen die nach Wood berechneten Werte X und Y keineswegs auf einer Geraden. „The discrepancies are large — sagt Natanson — and (from a detailed study of the data) I find it impossible to deduce any further conclusion except that probably $\beta > 0$ i. e. $\alpha_2 > \alpha_1$... The matter is thus seen to be of considerable interest; but to settle the question further experimental data are required.“

§ 13. Das hier geschilderte Beobachtungsmaterial erlaubt uns — hoffe ich — die faktische Grundlage als genügend fest zu betrachten, um auf ihr eine weitere Rechnung aufbauen zu können. Setzt man in die Gleichung (2), § 12 die aus den Beobachtungen der Kathodenstrahlen bekannten Werte e und e/m ein, so erhält man, indem man

$$\alpha_1 = 6,714,$$

$$\alpha_2 = 9,014$$

annimmt:

$$N_1 = 2,3 \cdot 10^{14}, \quad N_2 = 3 \cdot 10^{14}.$$

Es zeigt sich nun, daß die Volumeneinheit des gesättigten Natriumdampfes mehr solche Dispersionselektronen enthält, deren Eigenfrequenz der Linie D_2 entspricht, als solcher, deren Eigenschwingung mit der Linie D_1 zusammenfällt. Das Verhältnis der Zahl beider Elektronengattungen wäre:

$$\frac{N_2}{N_1} = 1,3.$$

§ 14. In Übereinstimmung damit ist, wie man sowohl aus der Tabelle, wie aus der Zeichnung ersieht, die Abweichung von dem normalen Werte der Brechungsexponenten größer auf der grünen, als auf der roten Seite des Spektrums.

Diesen Unterschied im Verhalten beider D -Linien hat zum erstenmal Becquerel bemerkt und ihn dahin charakterisiert, daß jede von den Linien — wie er sich ausdrückt — „manifeste une individualité propre.“²⁾ Dieselbe Erscheinung

1) l. c.

2) Becquerel, l. c.

tritt uns übrigens auf allen mit der Methode der gekreuzten Prismen aufgenommenen Photogrammen der anomalen Dispersion im Na-Dampfe sehr deutlich entgegen. Auch bei den Beobachtungen der magnetischen Drehung der Polarisations-ebene durch denselben Dampf konnte man eine ähnliche Asymmetrie in bezug auf die Linien D_1 und D_2 feststellen. Die Messungen von Wood¹⁾ und hauptsächlich die in der Tabelle auf p. 416 zusammengestellten Größen scheinen sogar direkt darauf hinzuweisen, daß das Verhältnis $N_2/N_1 > 1$ sein wird.

Nicht ohne Interesse ist auch zweifellos der Umstand, daß der Unterschied der Breite beider D -Linien sowohl im Sonnenspektrum²⁾ wie auch in unseren Versuchsbedingungen in keinem Widerspruch mit der Größe dieses Verhältnisses steht, und auch das Verhältnis der Intensitäten beider Linien einen nahezu gleichen Wert hat.³⁾ Man kann nicht leugnen, daß diese übereinstimmenden Merkmale auf eine tiefer liegende Beziehung hinweisen, an deren Ergründung jedoch man sich heutzutage nur mit größter Vorsicht heranwagen kann. Zwar ist, wie es scheint, die Anschauung Michelsons⁴⁾, daß die beiden Na-Linien aus mehreren Komponenten bestehen, durch die Versuche von Janicki⁵⁾, Gehrcke und Baeyer⁶⁾ als widerlegt zu betrachten, jedoch die Tatsache, daß der Zeemaneffekt komplizierter für D_2 als für D_1 ist und auch der Umstand, daß unsere Kenntnisse der Bedingungen, von denen die Breite der umgekehrten Linie abhängt, ganz unzureichend sind — erlaubt es nicht, eine weitere Schlußfolgerung ohne Bedenken zu unternehmen.

§ 14. Interessant ist schließlich das Verhältnis der Anzahl der Dispersionselektronen pro Volumeneinheit des gesättigten Dampfes zu der Zahl der Natriumatome, die bei unseren Versuchsbedingungen in gleichem Volumen enthalten

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 10. p. 416. 1905.

2) H. A. Rowland, Astroph. Journ. 2. p. 368. 1895.

3) W. Dietrich (Wied. Ann. 12. p. 519—526. 1881) gibt 1,6 an, was Kayser (Handbuch der Spektroskopie 2. p. 365. Anm.) für etwas zu groß hält.

4) A. A. Michelson, Phil. Mag. 45. p. 348. 1898.

5) L. Janicki, Ann. d. Phys. 19. p. 36. 1906.

6) E. Gehrcke u. O. v. Baeyer, Ann. d. Phys. 20. p. 269. 1906.

sind. Diese Zahl kann offenbar nur angenähert geschätzt werden, da ja exakt genommen die Rechnung nur für ideale Gase zulässig ist. Handelt es sich jedoch nur, wie in unserem Fall, um Bestimmung der Größenordnung, so kann man den gesättigten Dampf für einen Augenblick als ein ideales Gas betrachten und aus der Dichte (d), dem Atomgewicht (μ), der Gaskonstante (R) und der absoluten Temperatur (T) mittels der Formel:

$$p = \frac{d}{\mu} R T$$

seinen Druck (p) berechnen.

Da die Dichte des gesättigten Dampfes bei 385°C. nach Jewett $1 \cdot 10^{-6}$ ist und das Atomgewicht sich auf $\mu = 23$ beläuft, so ergibt sich aus der Berechnung:

$$N \geq 3,9 \cdot 10^{16}, \quad N:N_1 \geq 200:1, \quad N:N_2 \geq 400:3.$$

Diese Größe $N_A:N_E$, die die Substanz in optischer Hinsicht charakterisiert, indem sie sozusagen ein Maß der in ihr enthaltenen Resonatoren von bestimmter Eigenschwingung angibt, kann zweckmäßig als „optische Ionisation“ bezeichnet werden. Sie ist, wie wir gesehen haben, bei nichtleuchtendem Natriumdampfe viel größer als z. B. beim leuchtenden Wasserstoff, wo Ladenburg und ich bei den damaligen Versuchsbedingungen dasselbe Verhältnis für die H_α -Linie zu 50000:1 berechnet haben.

Auffallend ist auch die Tatsache, daß eine Schätzung derselben Ionisation auf Grund der von Hallo¹⁾ und Geiger²⁾ ausgeführten Messungen der magnetischen Drehung der Polarisationssebene in einer schwachen Natriumflamme denselben Wert 200:1 ergeben hat.

§ 16. Zum Schluß möchte ich noch einem möglichen Mißverständnis vorbeugen, nämlich daß die Übereinstimmung, die wir zwischen der Erfahrung und den für die Drudesche Dispersionstheorie charakteristischen Gleichungen festgestellt haben, als Argument für die Überlegenheit dieser Theorie der Lorentzschen oder Planckschen gegenüber dienen könnte. Das ist keineswegs der Fall. Um zu entscheiden, welcher von

1) J. J. Hallo, Arch. Neerl. (2) 10. p. 148. 1905.

2) L. Geiger, Ann. d. Phys. 23. p. 790. 1907.

den erwähnten Theorien der Vorzug zu geben ist, müßte man mit der Dispersionsmessung eine exakte Bestimmung der Extinktion $\kappa = \kappa(\lambda)$ im Dampfe verknüpfen. Derartige Rechnungen, wie sie etwa Erfle¹⁾ durchgeführt hat, sind und bleiben rein willkürlich, solange keine Tatsachen, keine in wohl definierten Versuchsbedingungen errungenen Resultate der Messungen vorliegen. Leider stehen solchen Messungen im Natriumdampfe große Schwierigkeiten entgegen, da die Extinktionskurve auf äußerst schmalen Bezirken sehr steil verläuft, und die geringsten Spuren des Dampfes das Licht an den Stellen D_1 und D_2 fast gänzlich auslöschen. Die bisherigen Bemühungen, diese Schwierigkeiten zu überwinden, sind einstweilen als erfolglos zu bezeichnen.

Breslau, Physik. Inst., Mai 1909.

1) H. Erfle, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 35. 1908.

(Eingegangen 28. Juli 1909.)

**4. Über die Abhängigkeit
des Dauer- und Momentanprozesses einer
getrennten Phosphoreszenzbande vom Metallgehalt
und über die Erregungsverteilungen dieser
beiden Prozesse;
von A. Werner und H. Gohdes.**

Jeder Erdalkaliphosphor enthält nach P. Lenard¹⁾ eingebettet in einer großen Menge inaktiven Füllmaterials die eigentlichen Zentren seiner Lichtemission, welche aus Atomen des Erdalkalimetalls, des wirksamen Metalls und des Schwefels bestehen und sich beim Glühen der drei zum Erscheinen von Phosphoreszenz notwendigen Bestandteile: Erdalkalisulfid, Metall und schmelzbarer Zusatz bilden. Jedem wirksamen Metall kommen in jedem Erdalkalisulfid verschiedene solcher Zentren zu, die sich nur durch die Zahl und Gruppierung der Atome unterscheiden, und deren Bildung von Glühdauer, Metallmenge und Wahl des Zusatzes beeinflusst wird. Ein bestimmtes Zentrum emittiert immer nur eine Phosphoreszenzbande und funktioniert in der Hauptsache unabhängig von den anderen.

Das Charakteristische dieser Zentren sind nach P. Lenard ihre Eigenschwingungsdauern, deren sie drei fähig sind, die sämtlich dem Metallatom im Zentrum zugehören, aber an verschiedene Zustände des betreffenden Metallatoms gebunden sind: die Eigenschwingungsdauer der Erregung, gegeben durch die Erregungsverteilung²⁾, die der Emission³⁾ und die der

1) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. p. 669. 1904; vgl. auch P. Lenard, Verhandl. d. Naturhistorisch-medizinischen Vereins, Heidelberg 1909.

2) Jede Bande wird durch ganz bestimmte Lichtwellenlängen erregt, die vorwiegend dem violetten und ultravioletten Teil des Spektrums angehören.

3) In Übereinstimmung mit dem Stokesschen Gesetz ist das erregte Phosphoreszenzlicht von längerer Welle als die erregende Strahlung.

Auslöschung, insofern bestimmte Lichtwellen großer Länge auslöschend auf die erregte Bande wirken.¹⁾

Außer diesen „Schwingungszuständen“ kann jedes Zentrum noch drei weitere von der Temperatur abhängige Zustände annehmen, ohne jedoch dabei seine Eigenschwingungsdauern zu verändern.²⁾ Diese Zustände sind für die einzelnen Zentren oder Banden an bestimmte wohlerkennbare Temperaturbereiche gebunden, gehen aber an den Grenzen ineinander über.

Im unteren Grenzzustand, dem Kältezustand, laufen bei erregender Belichtung zwei die Bande betreffende Prozesse gleichzeitig ab, nämlich schnell an- und abklingendes Leuchten und eine mit der Dauer und Intensität der Belichtung asymptotisch anwachsende Aufspeicherung von Erregung. Im oberen Grenzzustand, dem Hitzezustand, findet Aufspeicherung der einstrahlenden Energie nicht mehr statt, sondern momentanes An- und Abklingen der Bande ist alles, was die erregende Belichtung hervorruft. Im dazwischen liegenden Zustand, dem Dauerzustand, findet wieder Aufspeicherung von Erregung statt, wenn auch von minderer Vollkommenheit als im Kältezustand, insofern nämlich ein Teil der Erregung sofort durch das Leuchten der Bande, das mit dem Eintritt der Erregung beginnt, wieder verausgabt wird.

Durch die quantitative Verfolgung des Abklingungsprozesses gelang es festzustellen³⁾, daß der von Lenard und Klatt in den beiden Grenzzuständen der Bande beobachtete Prozeß des momentanen Leuchtens auch im Dauerzustand der Bande vorhanden ist, deren Abklingung demnach in zwei Prozessen des Leuchtens neben- und unabhängig voneinander verläuft: ein Momentanprozeß, der nach Aufhören der Belichtung des Phosphors schnell abklingt, und ein Dauerprozeß, der am langen Nachleuchten des Phosphors in die Erscheinung tritt. Jeder dieser beiden sich übereinander lagernden Prozesse befolgt, wie A. Werner³⁾ gezeigt hat, in der Abklingung seine besondere Gesetzmäßigkeit. Der Momentanprozeß verläuft nahezu exponentiell, der Dauerprozeß nach einer ähnlichen Gesetz-

1) P. Lenard, Verhandl. d. Naturhistorisch-medizinischen Vereins Heidelberg 1909.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. p. 666 ff. 1904.

3) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 164. 1907.

mäßigkeit, wie sie von E. Becquerel¹⁾ für die Gesamtemission seiner Phosphore als nahe zutreffend angegeben worden ist.

Da nun das Nachleuchten an die im Phosphor enthaltenen Metallatome gebunden ist, ergab sich als weitere Frage die: wie und in welchem Maße die Menge der im Phosphor enthaltenen Metallatome den Dauer- und Momentanprozeß des Nachleuchtens beeinflussen und wie weiter auch die Aufspeicherung der Energie bei der vorhergehenden Belichtung von der Metallmenge abhängt.

Die Phosphore. Als besonders geeignet für die Untersuchung erwies sich die schon früher²⁾ benutzte Hauptbande α des SrZn-Phosphors mit CaF_2 -Zusatz — $\lambda_{\text{max.}}$ bei $550 \mu\mu$ —, weil diese wegen ihrer spektralen Lage durch Zwischenschalten eines Gelbfilters leicht von den anderen getrennt werden kann und bei gewöhnlicher Temperatur fast allein im Spektrum vorhanden ist. Die Zn-Lösung war eine wässrige Lösung des Nitrates, die den Präparaten tropfenweise zugesetzt wurde. Aus dem Gewichte des Tropfens und dem Gehalt der Lösung war die in einem Tropfen befindliche Metallmenge berechenbar. Alle Angaben beziehen sich auf freies Metall und 3 g vorpräpariertes Strontiumsulfid. Das Glühen der Phosphore geschah in Porzellantiegeln, die mit reinster Platinfolie ausgekleidet waren. Die Metallzusätze bewegten sich in den Grenzen zwischen 0,00001 g und 0,1 g Zn. Im allgemeinen wurden die Beobachtungen von Lenard und Klatt bestätigt gefunden, insofern die Phosphoreszenzhelligkeit mit zunehmendem Metallgehalt zuerst sehr schnell anwächst bis zu einem Bereich so gut wie konstanter Intensität, nach dessen Durchschreitung Abfall eintritt bis zum Nichtleuchten. Die Massen werden dann durch ihre schmutzige Farbe kenntlich. Bemerkt möge hier werden, daß es uns gelang, gut leuchtende Zn-Phosphore herzustellen innerhalb der oben erwähnten weiten Grenzen³⁾, während der Bereich fast konstanter Helligkeit, den Lenard und Klatt⁴⁾ beobachteten, sich bei Mn in CaS

1) E. Becquerel, *La Lumière* 1. p. 285.

2) A. Werner, *Ann. d. Phys.* 24. p. 164. 1907.

3) Wohl zu erklären durch die Bildung phosphoreszierenden Zn-Sulfids bei großem Zn-Gehalt.

4) Lenard u. Klatt, *Ann. d. Phys.* 15. p. 651. 1904.

nur bis zu 0,006 g Metallgehalt erstreckte, bei allen anderen Phosphoren aber geringer war. Aus der großen Zahl der Präparate wurde eine Anzahl zur quantitativen Messung des Momentan- und Dauerprozesses und zur Ermittlung ihrer Abhängigkeit vom Metallgehalt ausgewählt. Die Metallmengen betrugen in Gramm:

0,00001 0,0001 0,01 0,1

Der Phosphor befand sich fein gepulvert in einem durch eine Quarzplatte abgeschlossenen Gefäß aus dünnem Kupferblech, so daß er eine ebene Schicht bildete, die nach der Erregung eine homogene leuchtende Fläche lieferte. Vor jedem Versuch wurde die noch im Phosphor vorhandene Erregung durch Erhitzen bis zur oberen Temperaturgrenze der α -Bande, die kurz vor der beginnenden Rotglut liegt, ausgetrieben.

Die Erregung des Phosphors geschah durch eine auf konstanter Spannung gehaltene Quecksilberlampe aus Quarzglas, die wegen ihrer Reichhaltigkeit an ultravioletten Strahlen und durch das Fehlen der die Phosphoreszenz auslöschenden roten Strahlen sich besonders gut der spektralen Erregungsverteilung der α -Bande des SrZn-Phosphors, die weit ins Ultraviolett reicht, anpaßt. Der Phosphor befand sich in einem lichtdichten Kasten senkrecht unter der Lampe in einer Entfernung von etwa 20 cm. Nachdem durch einige Minuten Brennzeit Konstanz der Lampe erreicht war, wurde der Schieber des Kastens geöffnet, der Phosphor zwei Minuten lang exponiert und dann die Abklingung der durch GelbfILTER isolierten Bande in dem schon früher¹⁾ benutzten Apparat auf photographischem Wege ermittelt. Durch das nach dem Schlage eines Metronoms erfolgende Öffnen und Schließen eines Metallschiebers geschah die Belichtung des Filmstreifens, die am Anfang der Abklingung wenige Sekunden, am Schluß mehrere Minuten betrug. In einem Zeitraum von etwa 15 Minuten wurden so in der Regel zehn Expositionen vorgenommen.

Methode der Untersuchung. Die Intensitätsbestimmung des abklingenden Phosphors geschah, wie schon erwähnt, auf

1) A. Werner, Ann. d. Phys. 24, p. 164. 1907.

photographischem Wege unter Zuhilfenahme einer Vergleichsschwärzungskurve und unter Berücksichtigung des Schwarzschild'schen Gesetzes.¹⁾ Sämtliche Versuche sind mit dem von Perutz gelieferten Perorto-Film ausgeführt, der neben hoher Empfindlichkeit im Gelbgrün vorzügliche Homogenität der sensiblen Schicht zeigte.

Mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Schwärzung der Bromsilbergelatine von der Entwicklungsart (chemische Zusammensetzung, Zeitdauer, Temperatur) und Fixierung wurde darauf geachtet, daß bei allen Versuchen die gleichen Bedingungen vorhanden waren. Sämtliche Messungen, die sich auf einen Versuch bezogen, wurden immer auf Teilen desselben Films vorgenommen, die dann auch zusammen entwickelt (Rodinal 1:10, 1 Min.) und fixiert wurden.

Zur Ausmessung der erhaltenen Schwärzungen diente ein Kolorimeter mit Lummer-Brodhun-Würfel, bei welchem die Durchlässigkeit der geschwärzten Felder mit derjenigen einer Kupfersulfatlösung variabler Schichtdicke verglichen wurde.

Trennung des Momentan- und Dauerprozesses. Während es E. Becquerel mißglückte, das Abklingen der Phosphore durch eine Exponentialfunktion der Zeit oder durch Summen solcher Funktionen darzustellen, gelang es A. Werner²⁾ durch Betrachtung einer Einzelbande, die das gesamte Nachleuchten darstellenden und sich übereinanderlagernden Prozesse — Momentan- und Dauerprozeß — zu trennen und die Gesetzmäßigkeiten für sie aufzustellen. Für den Dauerprozeß ergab sich im Anschluß an eine von E. Becquerel³⁾ aufgestellte empirische Beziehung, daß, wenn man die reziproke Wurzel aus der Intensität als Funktion der Zeit darstellt, die Beziehung besteht:

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{1}{\sqrt{J_0}} (1 + \alpha t),$$

wobei α die Abklingungskonstante des Dauerprozesses bedeutet, d. h. die für die Zeiteinheit bedingte Zunahme der reziproken

1) Hierüber und über die photographischen Eigenschaften des verwandten Films vgl. A. Werner, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie, Photophysik u. Photochemie 1908; A. Becker u. A. Werner, ebenda 1907.

2) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 180 ff. 1907.

3) E. Becquerel, La Lumière 1. p. 295.

Wurzel aus der Intensität, und J_0 die Anfangsintensität. Die Gleichung besagt in Worten, daß die reziproke Wurzel aus der Intensität linear mit der Zeit anwächst, die Wurzel aus der Intensität also linear mit der Zeit abnimmt. Die durch diese Gleichung ausgedrückte Gesetzmäßigkeit wurde für den späteren Verlauf der Bandenabklingung bestätigt gefunden. Trägt man nämlich als Ordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems die reziproken Wurzeln der gefundenen Phosphorintensitäten als Funktion der zur Abszisse gewählten Zeit auf, so entsprechen die letzten Punkte der Abklingung der obigen Gleichung und liegen auf einer Geraden (vgl. Fig. 1). Der Anfang der Abklingung erfolgt aber bedeutend schneller und wird daher durch die Becquerelsche Gleichung nicht ausgedrückt. Der erste Teil der Kurve stellt dann vornehmlich den schnell abklingenden Momentanprozeß dar, während der zweite Teil den langsam abfallenden Dauerprozeß anzeigt. Die graphische Darstellung ermöglicht eine scharfe Trennung der beiden übereinander gelagerten Prozesse. Verfolgen wir nämlich die Gerade bis zu ihrem Schnittpunkt mit der Ordinatenachse, so erhalten wir die reziproke Wurzel der zur Zeit Null vorhandenen Intensität J_0 des Dauerprozesses, die Bandenintensität. Führen wir noch die Bandendauer D ¹⁾, die reziproke Tangente des Neigungswinkels der Geraden ein — die Bande klingt um so langsamer ab, je kleiner die Neigung —, so läßt sich die Gleichung der Geraden auch ausdrücken durch

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{1}{\sqrt{J_0}} = \frac{t}{D},$$

woraus sich dann Bandenintensität und Bandendauer berechnen lassen.

Resultate. In Fig. 1 ist in der oben erwähnten Weise für eine Anzahl der untersuchten Phosphore vom Metallgehalt 0,00001, 0,0001, 0,01 und 0,1 g die reziproke Wurzel der Intensität der abklingenden Bande als Funktion der zur Abszisse gewählten Zeit gezeichnet. Aus den Kurven tritt hervor, daß bei allen Phosphoren von stark variierendem Metallgehalt die späteren Punkte der Abklingungen mit genügender Genauigkeit auf einer Geraden liegen, die lineare Gleichung

1) Dimension: $D = [J^{1/2} t]$.

also für den Dauerprozeß in allen hier studierten Fällen Gültigkeit besitzt.

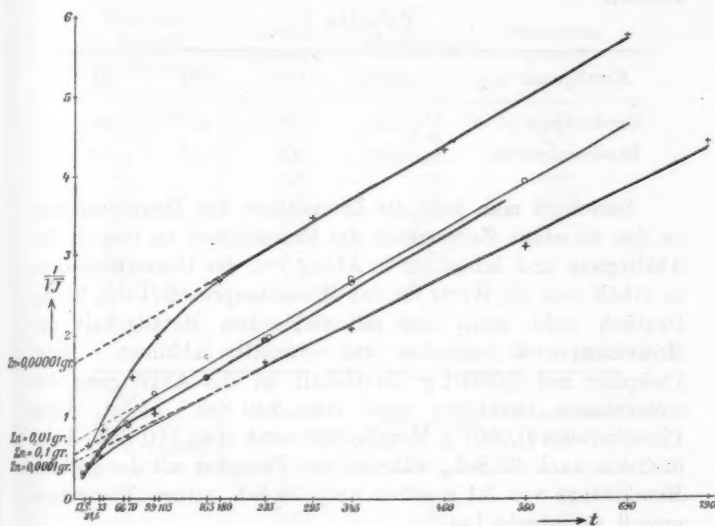


Fig. 1.

Ebenso wie sich die Bandendauer im wesentlichen unabhängig von der erregenden Intensität erwiesen hat¹⁾, so ergibt sich hier aus der Parallelität der Geraden, daß keine Abhängigkeit der Bandendauer von den in den Phosphoren enthaltenen Metallmengen besteht. Dasselbe Resultat geht auch aus den in Tab. 1 für die Bandendauer angegebenen Werten hervor, deren geringe Abweichungen voneinander noch innerhalb der Fehlergrenze liegen.

Dagegen zeigt sich eine Beeinflussung der Bandenintensität durch die Metallmengen. Während jedoch zwischen Bandenintensität und der erregenden Intensität ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht²⁾, läßt sich ein solcher zwischen dem Metallgehalt in den Phosphoren und der Bandenintensität

1) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 183. 1907.

2) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 183. 1907.

nicht ermitteln.¹⁾ Die exakten Werte für die Bandendauer und Bandenintensität des Dauerprozesses ergibt die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

Metallgehalt in g	0,00001	0,0001	0,01	0,1
Bandendauer [$J^{1/2} \cdot t$]	170	199	179	167
Bandenintensität	0,35	4,6	1,8	3,4

Berechnet man jetzt die Intensitäten des Dauerprozesses zu den einzelnen Zeitpunkten der Expositionen im Beginn der Abklingung und bringt sie in Abzug von der Gesamtemission, so erhält man die Werte für den Momentanprozeß (Tabb. 2—5). Deutlich sieht man, daß mit steigendem Metallgehalt der Momentanprozeß schneller und schneller abklingt. Beim Phosphor mit 0,00001 g Zn-Gehalt ist die Abklingung des momentanen Leuchtens nach etwa 240 Sek. erfolgt, beim Phosphor mit 0,0001 g Metallgehalt nach etwa 160 Sek., beim nächsten nach 95 Sek., während der Phosphor mit der größten Metallmenge von 0,1 g schon nach 55 Sek. seinen Momentanprozeß verausgabt hat.

Tabelle 2.

$$J_0 = 0,35. \quad D = 170. \quad \text{Zn} = 0,00001 \text{ g.}$$

Zeit nach Schluß der Erregung	Gesamt- intensität	Dauerprozeß	Momentan- prozeß
22,5 sec	2,31	0,30	2,01
35	1,38	0,28	1,10
70	0,44	0,23	0,21
105	0,25	0,20	0,05
180	0,14	0,12	0,02
295	0,084	0,084	—
460	0,053	0,052	—
690	0,030	0,031	—

1) Dieses Resultat kann nicht verwundern, weil außer dem Metallgehalt noch andere nicht gut kontrollierbare Faktoren wie die Glüh-temperatur die Intensität der Phosphoreszenz bedingen.

Tabelle 3.

$J_0 = 4,6$. $D = 199$. $Zn = 0,0001$ g.

Zeit nach Schluß der Erregung	Gesamt- intensität	Dauerprozeß	Momentan- prozeß
13,5 sec	10,73	3,45	7,28
21,5	5,97	2,94	3,03
33	3,59	2,50	1,09
66	1,65	1,56	0,09
99	1,13	1,06	0,07
235	0,37	0,37	—
345	0,23	0,21	—
560	0,10	0,09	—
790	0,05	0,05	—

Tabelle 4.

$J_0 = 1,8$. $D = 179$. $Zn = 0,01$ g.

Zeit nach Schluß der Erregung	Gesamt- intensität	Dauerprozeß	Momentan- prozeß
13,5 sec	9,18	1,52	7,66
21,5	5,80	1,35	4,45
33	3,35	1,17	2,18
66	1,14	0,81	0,33
99	0,61	0,61	—
165	0,33	0,35	—
235	0,26	0,24	—
345	0,14	0,14	—
560	0,07	0,07	—

Tabelle 5.

$J_0 = 3,4$. $D = 167$. $Zn = 0,1$ g.

Zeit nach Schluß der Erregung	Gesamt- intensität	Dauerprozeß	Momentan- prozeß
13,5 sec	9,74	2,70	7,04
21,5	5,40	2,29	3,11
33	3,52	1,88	1,64
66	1,19	1,19	—
99	0,79	0,79	—
165	0,44	0,43	—
235	0,26	0,26	—
345	0,14	0,15	—

Noch anschaulicher zeigen dieses Verhalten die graphischen Darstellungen der Figg. 2—5.

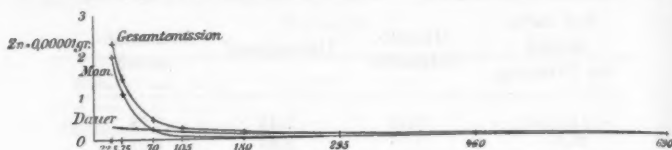


Fig. 2.

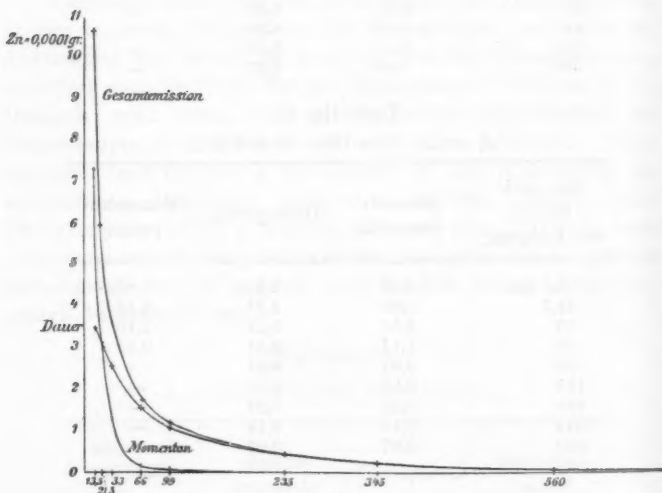


Fig. 3.

Fast senkrecht fällt hier beim Phosphor größten Metallgehaltes die den Momentanprozeß darstellende Kurve ab, während beim Phosphor geringsten Metallgehaltes langsames Abklingen dieses Prozesses zu beobachten ist, der überwiegend die gesamte verausgabte Energie liefert.

Was den analytischen Ausdruck für den Vorgang des momentanen Leuchtens betrifft, so war von A. Werner¹⁾ gefunden worden, daß sich der der Beobachtung zugängliche

1) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 184. 1907.

Teil darstellen läßt durch eine Exponentialfunktion nach einer Potenz von der Zeit

$$J = J_1 e^{-at^m},$$

wo m für die damals benutzten Phosphore (Metallgehalt 0,0005 g) gleich 0,5 war.

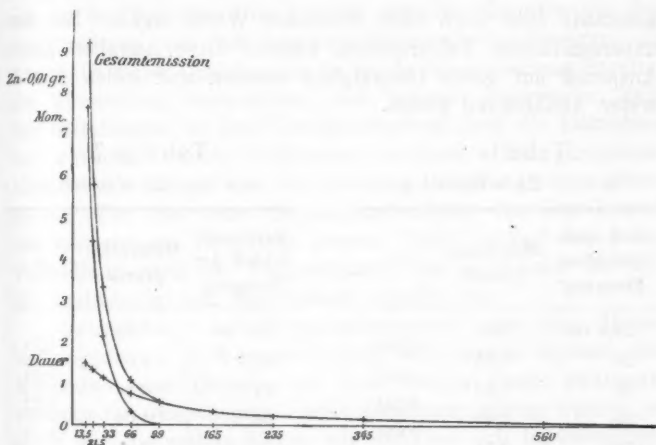


Fig. 4.

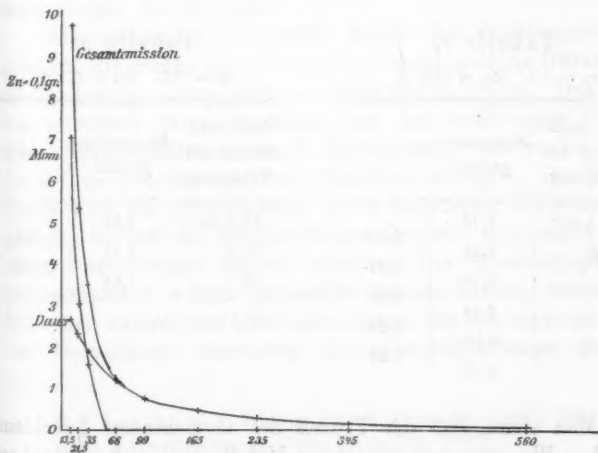


Fig. 5.

In den nachstehenden Tab. 6—9 sind für die hier untersuchten Phosphore die Werte für die Exponenten m ermittelt worden, für welche die Abklingungskonstante

$$\alpha = \frac{\lg \text{nat } J_1 - \lg \text{nat } J_2}{t_2^m - t_1^m}$$

konstante oder doch nahe konstante Werte ergab. Bei den unvermeidlichen Fehlerquellen können diese Angaben kaum Anspruch auf große Genauigkeit machen und sollen nur in erster Annäherung gelten.

Tabelle 6.

 $m = 1. \text{ Zn} = 0,00001 \text{ g.}$

Zeit nach Schluß der Erregung	Momentan- prozeß	α
22,5 sec	2,01	0,053
30	1,35	
35	1,10	0,041
55	0,49	0,041
70	0,21	0,056
105	0,05	0,041

Tabelle 7.

 $m = 0,8. \text{ Zn} = 0,0001 \text{ g.}$

Zeit nach Schluß der Erregung	Momentan- prozeß	α
13,5 sec	7,28	0,24
21,5	3,03	
25	2,23	0,21
33	1,09	0,22
50	0,35	0,18
66	0,09	0,24

Tabelle 8.

 $m = 0,7. \text{ Zn} = 0,01 \text{ g.}$

Zeit nach Schluß der Erregung	Momentan- prozeß	α
13,5 sec	7,66	0,23
21,5	4,45	
25	3,30	0,31
33	2,18	0,20
50	0,87	0,24
66	0,33	0,29

Tabelle 9.

 $m = 0,2. \text{ Zn} = 0,1 \text{ g.}$

Zeit nach Schluß der Erregung	Momentan- prozeß	α
13,5 sec	7,04	4,8
21,5	3,11	
33	1,64	4,0

Man sieht, daß der Prozeß des momentanen Leuchtens bei dem Phosphor mit geringstem Metallgehalt sich angenähert

als reine Exponentialfunktion darstellen läßt ($m = 1$). Mit wachsendem Metallgehalt wird m kleiner und kleiner, um beim größten Metallgehalt den ungefähren Wert von 0,2 zu erreichen.

Besteht nun nach P. Lenard und V. Klatt¹⁾ die Erregung der Phosphore im Austritt negativer Quanten aus den Metallatomen, und faßt man den Verbrauch der Erregung als Rückkehr dieser Quanten auf, so würde das gewonnene Resultat der Vorstellung entsprechen, daß mit der wachsenden Zahl der Metallatome in den Emissionszentren auch die Dämpfung der zurückkehrenden Elektronen zunimmt. Bei geringstem Metallgehalt kommt der sehr geringen Dämpfung entsprechend in der Tat die reine Exponentialfunktion für den Prozeß des momentanen Leuchtens heraus. Nicht berührt von dieser Vorstellung wird der Dauervorgang des Leuchtens, der sich als unabhängig vom Metallgehalt ergeben hat.

Untersuchung der Erregungsverteilung. Aus den Untersuchungen von A. Werner²⁾ hatte sich bereits ergeben, daß Momentan- und Dauerprozeß einer Bande durch bestimmte voneinander unabhängige Lichtwellenlängen erregt werden; es ergab sich die weitere Frage: wie verhalten sich die Erregungsverteilungen dieser beiden Prozesse bei den Phosphoren mit wechselndem Metallgehalt.

Als erregende Lichtquelle wurde die Kohlebogenlampe gewählt, die wegen ihres kontinuierlichen, weit ins Ultraviolett reichenden Spektrums sich am geeignetsten erwies. Das Licht wurde mittels einer Quarzlinse auf den Spalt eines Fuessschen Quarzspektrographen³⁾ konzentriert, von wo es dann durch den Apparat auf den Phosphor gelangte. Die Bogenlampe und der Strahlengang waren vollständig lichtdicht eingebaut, so daß die Beobachtungen bequem mit ausgeruhtem Auge vorgenommen werden konnten. Der Spektrograph, der photographisch scharf eingestellt werden konnte, wurde mit Hilfe der zahlreichen Quecksilberlinien, die von einer an Stelle der Bogenlampe benutzten Quarzquecksilberlampe geliefert

1) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. p. 671. 1904.

2) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 190. 1907.

3) Zeitschr. f. Instrumentenk. 1897. p. 321; 1898. p. 325.

wurden, auf Wellenlängen genau geeicht. Die Richtigkeit der Eichung wurde geprüft mit Hilfe der Linien im Spektrum der Bogenlampe. In die Bildebene wurde an Stelle der sonst verwendeten photographischen Kassette eine Holzkassette gebracht, in der sich in einer flachen Rinne der Phosphor, abgeschlossen durch dünne Quarzblättchen, befand. Oberhalb des Phosphors war die auf Wellenlängen geeichte Glasskala angebracht. Zur Beobachtung der Phosphoreszenz war in den Schutzmantel des Kassettenträgers ein Beobachtungsrohr senkrecht zur Kassette eingesetzt. Zur Beleuchtung der Skala zwecks Ablesung diente eine elektrische Taschenlampe, deren Helligkeit ausreichte, um die Teilstriche abzulesen, ohne aber sonst irgendwie die Beobachtung der Phosphoreszenz zu beeinträchtigen.

Die Phosphore mit verschiedenem Metallgehalt wurden in der angegebenen Weise untersucht. Es zeigte sich, daß alle untersuchten Präparate eine Erregungsverteilung besaßen, wie sie in ihrer Verteilung der Maxima und Minima der von P. Lenard und V. Klatt für die α -Bande des SrZn-Phosphors angegebenen im wesentlichen entspricht.¹⁾ Die bisher okular erfolgende Schätzung der Intensitäten, zu welchen die einzelnen Wellenlängen den Phosphor erregten, wurde durch Aufnahme der Schwärzungskurve der Kohlebogenlampe und die dadurch gegebene Möglichkeit auf die Intensität des erregenden Lichtes zu schließen, etwas sicherer gestaltet. Da aber die Einzelwerte der Ordinaten der Maxima und Minima nicht mit der Zuverlässigkeit Anspruch auf Genauigkeit machen können wie die Abszissenwerte, wurde, zumal die Abszissenwerte für die Maxima und Minima bei allen untersuchten Phosphoren mit den von P. Lenard und V. Klatt angegebenen übereinstimmten, davon abgesehen, die beobachtete Erregungsverteilung zeichnerisch darzustellen. Es ist also die Erregung unabhängig vom Metallgehalt und nur bedingt durch die Art des im Phosphor enthaltenen Metalles. Hatten aber P. Lenard und V. Klatt das Stokessche Gesetz bei den von ihnen untersuchten Banden bestätigt gefunden, so ergaben die hier angestellten Beobachtungen an der α -Bande des SrZn-Phosphors —

1) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. 1904, Taf. III.

λ_{max} bei $550 \mu\mu$ —, daß auch die über $500 \mu\mu$ hinausliegenden Wellen noch deutlich das entleuchtete Präparat zu erregen vermochten. Diese bei einer Bande beobachtete Verletzung des Stokesschen Gesetzes bedarf jedoch im Hinblick auf die sich hieraus ergebenden Konsequenzen zunächst noch der Bestätigung an einer Anzahl weiterer Banden. In Übereinstimmung steht dieses Resultat mit neueren Arbeiten von Nichols und Merritt¹⁾, die den Beweis geführt haben, daß bei sämtlichen von ihnen untersuchten fluoreszierenden Substanzen bei genauer Prüfung das erwähnte Gesetz keine Gültigkeit besitzt.

Die schon früher beobachtete Tatsache, daß beide Prozesse durch verschiedene Lichtwellenlängen erregt werden, konnte ebenfalls bestätigt werden. Die Beobachtung ergab, daß die Erregung des Dauerprozesses durch die längeren Wellen bis etwa $\lambda = 350 \mu\mu$ bewirkt wird und mit abnehmender Wellenlänge mehr und mehr zurücktritt; dagegen wird der Momentanprozeß vorzugsweise durch Wellen mit großer Schwingungszahl erregt.

Es zeigte sich weiter, daß die den Momentanprozeß gebenden Wellen sofort beim Auffallen auf den Phosphor diesen zum Aufleuchten brachten und sehr schnell dieses Leuchten bis zum Maximum steigerten. Die den Dauerprozeß erregenden Wellen brauchten weit längere Zeit, um die Phosphoreszenz erst sichtbar zu machen und sie zu ihrer maximalen Stärke zu entwickeln. Diese Beobachtung ist dem von P. Lenard und V. Klatt gefundenem Resultat²⁾ analog, daß nämlich Dauerbanden meist besonders hoher erregender Lichtstärken bedürfen, um hell zu erscheinen, während Momentanbanden im allgemeinen geringerer Intensitäten zur guten Erregung bedürfen.

Die Abklingung der beiden Prozesse geschah ganz in der Weise, wie sie früher³⁾ angegeben wurde. Wurde nämlich die Erregung plötzlich unterbrochen, so fiel das momentane Leuchten schnell ab, um dann je nach dem Metallgehalt des Phosphors früher oder später zu verschwinden. Der

1) E. F. Nichols u. E. G. Merritt, Phys. Review 18. p. 403; 19. p. 18. 1908.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. p. 477. 1904.

3) A. Werner, Ann. d. Phys. 24. p. 188. 1907.

Phosphor mit 0,1 g Metallgehalt zeigte nur etwa 1 Min. lang anhaltendes momentanes Leuchten, mit abnehmendem Metallgehalt nahm dann die Dauer dieses Prozesses allmählich zu. Das Dauerleuchten dagegen klang nur ganz langsam ab und war sehr lange anhaltend. Es ließ sich so das wechselnde Verhältnis von Momentan- und Dauerprozeß bei den Phosphoren mit verschiedenem Metallgehalt okular beobachten und in dem Sinne bestätigen, wie es als Resultat des ersten Teiles der Untersuchung in den Tabellen und Kurven niedergelegt worden ist.

Kiel und Charlottenburg, 12. Juni 1909.

(Eingegangen 26. Juli 1909.)

5. Die Bestimmung von e/m_0 ; von Kurt Wolz.

(Hierzu Taf. I, Figg. 1—6, Taf. II, Fig. 7 und sieben Aufnahmen.)

In dem Maße wie die Elektronentheorie an Bedeutung für die Erklärung physikalischer Erscheinungen gewinnt, wächst das Bedürfnis nach einer genauen Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons. Theorie und Experiment führen immer wieder, besonders auf dem Gebiete der Optik, zu Auswertungen von e/m_0 . Zahlreich sind daher auch die Versuche, die in den letzten 20 Jahren zur Bestimmung von e/m_0 unternommen worden sind. Auf p. 274 und 275 sind die bis jetzt darüber angestellten Versuche und Resultate in einer Tabelle zusammengestellt, die zum Teil dem Werke von C. G. Schmidt über Kathodenstrahlen (1904) entnommen sind. Ein Blick auf die Tabelle zeigt, daß die gefundenen Resultate zunächst noch recht beträchtlich schwanken. Erst mit verbesserten Hilfsmitteln und einwandfreieren Methoden haben die Resultate Werte angenommen, die sich immer mehr einander nähern. Zunächst wurden alle diese Versuche mit Kathodenstrahlen ausgeführt. Die Becquerelstrahlen des neu entdeckten Radiums gestatteten auch andere Methoden zur Anwendung zu bringen. Bis jetzt liegen zwei Arbeiten über Messungen an Becquerelstrahlen vor, die von W. Kaufmann und die von A. H. Bucherer. Bei der Kaufmannschen Anordnung liegen das elektrische und das magnetische Feld parallel zueinander. A. H. Bucherer verwendet bei seinen Experimenten die beiden Felder in gekreuzter Stellung, eine Anordnung, wie sie in einfacher Form schon J. J. Thomson und Bestelmeyer für Kathodenstrahlen gebraucht haben. Da nun Hr. Prof. A. H. Bucherer in seiner Arbeit¹⁾ den Wert von e/m_0 nur angenähert infolge der Kondensatorrandbedingungen finden konnte, so habe ich mich auf seine Ver-

1) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. 28. p. 513. 1909.

Beobachter	Datum	Strahlenart	Methode	$\frac{e}{m_0}$
Schuster . . .	1890	Kathodenstrahlen	Magnetische und elektrische Ablenkung	$0,1 \times 10^7$
J. J. Thomson	1897	"	Magnetische und elektrische Ablenkung	$0,77 \times 10^7$
J. J. Thomson	1897	"	Magnetische Ablenkung und Wärme	$1,17 \times 10^7$
W. Kaufmann	1897	"	{ Magnetische Ablenkung und Elektrodenspannung }	$1,77 \times 10^7$
W. Kaufmann	1898	"		$1,86 \times 10^7$
Schuster . . .	1898	"	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$0,96 \times 10^7$
W. Wien . . .	1898	"	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	2×10^7
Lenard . . .	1898	Lenardstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$0,639 \times 10^7$
Lenard . . .	1898	"	Magnetische Ablenkung und Verzögerung im elektrischen Felde	$0,68 \times 10^7$
Simon . . .	1899	Kathodenstrahlen	Magnetische Ablenkung u. Elektrodenspannung	$1,865 \times 10^7$
Wiechert . .	1899	"	Magnetische Ablenkung und Geschwindigkeit	1,01 bis $1,55 \times 10^7$
J. J. Thomson	1899	Ultraviolette Licht	Verzögerung der Entladung durch magnetisches Feld	$0,76 \times 10^7$
J. J. Thomson	1899	Glühende Metalle	Verzögerung der Entladung durch magnetisches Feld	$0,87 \times 10^7$
Lenard . . .	1900	Ultraviolette Licht	Magnetische Ablenkung u. Elektrodenspannung	$1,15 \times 10^7$
Seitz	1902	Kathodenstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$1,87 \times 10^7$
W. Kaufmann	1902	Becquerelstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$1,845 \times 10^7$
A. Wehnelt .	1903	Glühende Elektrolyte	Magnetische Ablenkung u. Elektrodenspannung	$1,4 \times 10^7$

Beobachter	Datum	Strahlenart	Methode	$\frac{e}{m_0}$
A. Becker . .	1905	Kathodenstrahlen	Magnetische Ablenkung u. Elektrodenspannung	$1,847 \times 10^7$
W. Kaufmann	1906	Becquerelstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$1,884 \times 10^7$
P. Weiss und A. Cotton }	1907		Zeemaneffekt	$1,767 \times 10^7$ (nach Gmelin)
A. Bestelmeyer	1907	Kathodenstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$1,72 \times 10^7$
A. Stettenheimer	1907		Zeemaneffekt	$1,791 \times 10^7$ (nach Gmelin)
A. H. Bucherer	1908	Becquerelstrahlen	Magnetische u. elektrostatische Ablenkung	$1,763 \times 10^7$
J. Classen . .	1908	Glühende Elektrolyte	Magnetische Ablenkung u. Elektrodenspannung	$1,776 \times 10^7$
P. Gmelin . .	1909		Zeemaneffekt	$1,771 \times 10^7$

anlassung der Aufgabe unterzogen, die Streuung der Kraftlinien über den Kondensatorrand hinaus experimentell genau zu bestimmen, und somit auch einen möglichst einwandfreien Wert für e/m_0 zu finden.

Theorie der Versuche.

Das Prinzip der Methode meiner Messungen ist das von A. H. Bucherer bei seinen Untersuchungen benutzte. Von einem Körnchen Radiumfluorid gehen β -Strahlen von großem Geschwindigkeitsbereiche aus und treten zunächst in einen Kondensator ein, der aus optisch ebenen versilberten Glasplatten besteht (Fig. 1, Taf. I). Der Kondensator befindet sich in einem evakuierbaren, zylindrischen Glasgefäße (Fig. 3, Taf. I), das in das Magnetfeld eines Solenoids so eingeschoben werden kann, daß die Richtung des Magnetfeldes parallel den Kondensatorplatten ist. Dann wirken auf die β -Strahlen zwei entgegengesetzte Kräfte, die elektrostatische des Kondensatorfeldes F und die vom Magnetfelde H herrührende elektrodynamische Kraft. Da letztere der Geschwindigkeit der β -Strahlen proportional ist, so kompensieren sich die beiden

Kräfte nur für Strahlen einer bestimmten Geschwindigkeit. Für diese Strahlen, die allein aus dem Kondensator austreten, ist:

$$(1) \quad \varepsilon F = \varepsilon H u,$$

$$(2) \quad \frac{u}{v} = \beta = \frac{F}{H v}.$$

Nach dem Verlassen des Kondensators treten die Strahlen in das reine Magnetfeld ein, werden abgelenkt und treffen auf die senkrecht zur Magnetkraft aufgestellte empfindliche Platte. Wendet man jetzt die Lorentzsche Formel an, bei der noch z die Ablenkung und a den Abstand zwischen dem Kondensator und der photographischen Platte bedeutet, so ergibt sich für e/m_0 nach A. H. Bucherer, l. c. p. 520:

$$(3) \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2 v z}{(a^2 + z^2) H} \tan \arcsin \beta.$$

Hiermit wäre e/m_0 vollkommen bestimmt, wenn der mit dem Komparator gemessene Abstand a zwischen Kondensator und photographischer Platte der richtige wäre. Infolge der Streuung der Kraftlinien des Kondensators über dessen Rand hinaus ist aber tatsächlich die Wirkung eine derartige, als ob der Abstand a um ein Stück verkürzt worden wäre (vgl. Bucherer, l. c. p. 522). Mithin ist also nicht a , sondern das Stück $a - p$ in Rechnung zu ziehen. Bei einem gewissen Abstände a muß daher die Formel folgendermaßen lauten:

$$(4) \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2 v z}{[(a - p)^2 + z^2] H} \tan \arcsin \beta.$$

Um aus dieser Gleichung nun p bestimmen zu können, ist noch eine zweite Gleichung notwendig, die durch eine Änderung des Abstandes a gefunden wird. Wird daher bei einem zweiten Versuche der Abstand geändert, dessen Größe a' sein möge, so erhält man:

$$(5) \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2 v z}{[(a' - p)^2 + z^2] H} \tan \arcsin \beta.$$

Durch Gleichsetzung von (4) und (5) ergibt sich p und e/m_0 . Dieser Wert von e/m_0 muß unverändert bleiben, wenn durch eine Änderung der Streuung der Kraftlinien, was durch eine verschiedene Höhe des versilberten Randes an der Vorder-

seite der Kondensatorplatten erreicht wird, p einen anderen Wert erhalten sollte. *Ergibt sich aber der gleiche Wert von e/m_0 bei verschiedenen Werten von p , so ist dies der beste Prüfstein für die Richtigkeit der Theorie meiner Messungen.*

Anordnung der Apparate.

Die Ablenkung der Becquerelstrahlen wurde, wie schon erwähnt, durch ein magnetisches und ein elektrostatisches Feld hervorgerufen, deren Wirkungen senkrecht zueinander standen. Das elektrische Feld wurde durch einen Kondensator erzeugt, dessen Potential von einer Hochspannungsbatterie herrührte. Ein Solenoid lieferte das gewünschte Magnetfeld. Solenoid sowie Kondensator werden weiter unten noch näher beschrieben. Durch geeignete Wahl der beiden Felder konnte man die Becquerelstrahlen von gewünschter Geschwindigkeit austreten und auf einer photographischen Platte auftreffen lassen. In einem Glaszylinder war der Kondensator mit einer Vorrichtung zum Festklemmen der photographischen Platte eingebaut. Fig. 1 auf Taf. I möge die gewählte Anordnung im Längsschnitte veranschaulichen. Der Apparat wurde in der Werkstätte von Max Wolz in Bonn angefertigt. Der mit aller Sorgfalt zusammengesetzte Kondensator mit den Platten k_1 und k_2 wurde an dem einen Ende einer durchbrochenen Messinghülse h befestigt. [In der Zeichnung sind die durchbrochenen Stücke der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.] Die Versilberung des Kondensators war durch teilweise Entfernung an den Außenflächen vom Ansatzstücke b isoliert. An dem anderen Ende der Messinghülse war ein zweites verstellbares Rohr a übergeschoben, an dem vorn eine eingedrehte Messingfassung m aufgeschraubt war, um die kreisförmige photographische Platte aufnehmen zu können. Diese wurde dann mit dem leicht federnden Messingbügel f festgehalten. Kondensator und photographische Platte standen senkrecht zueinander. An dem inneren Rohre h waren noch vier Schrauben angebracht, die ein Befestigen des zweiten Rohres a in der gerade gewünschten Entfernung zwischen Kondensator und photographischer Platte gestatteten (Fig. 4, Taf. I). Zwei bis drei Millimeter vom Kondensator entfernt war noch ein

Diaphragma d aufgestellt, das den Zweck hatte, Fluoreszenzlicht abzublenken. Meine ersten Aufnahmen waren dadurch verdorben, daß noch Fluoreszenzstrahlen auf die Platte gelangten, die über oder unter den Kondensatorplatten hindurchgelangten. Die Öffnung der Blende ist in Fig. 2, Taf. I in natürlicher Größe ersichtlich.

Um nun diesen Apparat in dem Glaszylinder festzuhalten, waren an den beiden Enden je drei Messingknöpfe angebracht, von denen zwei fest aufgeschraubt, der dritte bewegliche durch eine kräftige Messingfeder gegen die Innenwand des Glaskörpers gedrückt wurde. Der Apparat wurde somit in dem Zylinder an sechs Punkten völlig festgehalten. Die federnden Messingknöpfe befanden sich oben am Apparate, so daß eine Bewegung infolge der eigenen Schwere vollständig ausgeschlossen war. Zwei im Glasgefäße eingeschmolzene Platinfäden führten zu den Kondensatorplatten. Das offene Ende des Glaszylinders war umgebogen und geschliffen, um eine genügend breite Auflagefläche für den schwarzen Verschußdeckel zu geben. Zu dieser von mir gut plan geschliffenen Ansatzfläche war der innere Messingapparat so justiert, daß die Ebene der photographischen Platte mit der Ebene der geschliffenen Auflage parallel verlief. Der Glaskörper war derartig auf einem Holzfuße befestigt (vgl. Fig. 3, Taf. I), daß die Schlifffläche des Glases sowohl senkrecht zur Auflagefläche des Fußes lag als auch parallel zur Seitenkante A . Diese Seite wurde durch eine Federung gegen eine Innenfläche des Solenoids gedrückt. Hierdurch wurde erreicht, daß die Achse des Solenoids senkrecht zur Achse der eingebauten Messinghülse zur Aufstellung gelangte. Elektrostatisches und magnetisches Feld standen durch diese Anordnung ebenfalls senkrecht zueinander. Ferner war der Apparat noch so ausjustiert, daß die Achse des Solenoids, sowie die der Messinghülse möglichst in eine Ebene fielen. Vom Glaskörper führte noch ein Stutzen zur Luftpumpe. Zur Erzielung eines möglichst hohen und konstanten Vakuums wurde eine Gädepumpe verwendet, mit der außerdem noch eine Wasserstrahlpumpe sowie eine Fleussische Pumpe in Verbindung standen. Letztere bezweckte ein schnelles Auspumpen des Systems beim Beginn eines jeden Versuches, da ein schnelles Entfernen aller Gasteile die Bedingung einer

möglichst klaren, unverschleierten Platte war. Zu bemerken ist noch, daß bei allen Versuchen während der ganzen Belichtungsdauer stets das höchste Vakuum geherrscht hat.

Das elektrische Feld.

Zwei optisch ebene Glasplatten von 49,5 mm Länge, 30,15 mm Breite und 5,07 mm Höhe wurden mit einem dünnen, möglichst gleichmäßigen Silberbelage versehen, um als Kondensatorplatten zur Erzeugung des elektrischen Feldes zu dienen. Zwischen den beiden Kondensatorplatten waren an den vier Ecken Quarzplättchen von 0,25048 mm Dicke angebracht, über denen die Angriffspunkte der vier Klemmen lagen, die den Kondensator zusammenhielten. Durch diese Anordnung der Klemmen war ein Durchbiegen des Kondensators und somit ein unhomogenes Feld ausgeschlossen. Natürlich wurde auch darauf geachtet, daß alle vier Klemmschrauben stets möglichst gleich stark angezogen wurden. Zur Dickenbestimmung der vier Quarzplättchen wurde die bereits von A. H. Bucherer angegebene Methode angewendet. Mein Wert $d = 0,25048$ weicht um etwa 1 Promille von dem Bucherer'schen Werte ab.

Geladen wurde der Kondensator mit einer Akkumulatoren-batterie von 320 Elementen. Zum Schutze der Batterie sowie des Kondensators war noch ein Graphitwiderstand von etwa 660 000 Ohm eingeschaltet. Der Widerstand des Kondensators wurde mit einem Galvanometer bestimmt, dessen Empfindlichkeit 10^{-8} war. Bei einer Spannung von 246 Volt ergab sich hierbei ein Ausschlag von zwei Skalenteilen. Mithin beträgt der Widerstand des Kondensators $1,23 \times 10^{10}$ Ohm, d. h. der Widerstand ist so groß, daß eine Korrektur infolge Änderung des Potentials durch Leitfähigkeit nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht.

Sofort nach jeder Aufnahme wurde der benutzte Teil der Batterie gemessen. Das Vergleichselement war ein von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüftes Normalweston-element von 1,0191 Volt Spannung.

Die Spannung der Akkumulatorenbatterie blieb überraschend konstant.

Das magnetische Feld.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes benutzte ich ein wassergekühltes Solenoid, dessen Größenverhältnisse folgende waren: Länge = 103 cm, Breite = 22,5 cm und Höhe = 14,5 cm. Es war das gleiche, das A. H. Bucherer zu seinen Untersuchungen gedient hatte. Da nach Beendigung der Buchererschen Experimente von fremder Hand das Solenoid durch übermäßigen hydrostatischen Druck eine Deformation erlitten hatte, so wurde eine Neubestimmung des Magnetfeldes notwendig. Durch Vergleich mit einer Standardspule wurde diese Bestimmung ausgeführt. Die Dimensionen der Spule, deren Drahtwindungen auf einem genau zylindrischen Marmorkranz gewickelt waren, waren folgende:

$n = 136$ die Anzahl der Windungen,

$b = 4,12$ cm die Breite,

$R = 20,635$ cm der Radius der Spule.

Aus diesen Konstanten ergab sich:

$$H_{(\text{Sp})} = \frac{1}{10} \frac{J 2 n \pi}{R \left(1 + \frac{1}{8} \frac{b^2}{R^2} \right)} = 4,1205 J.$$

Der Widerstand der Standardspule betrug 50,4 Ohm, was nach bekannter Gleichsetzungsmethode gefunden wurde. Die Widerstände für die beiden Wicklungen des Solenoids hatten folgende Größen:

Wicklung 1 hatte	15,8827	Ohm	Widerstand
Wicklung 2 hatte	16,1747	"	"
Mithin jede im Mittel	16,0287	"	"

Nach Festsetzung dieser Normalwerte wurden Standardspule und Solenoid miteinander verglichen. Zu diesem Zwecke wurde die Standardspule über das Solenoid geschoben und genau in der Mitte senkrecht zur Achse des letzteren justiert. Ein kleiner empfindlicher Magnet mit einem Spiegel wurde innerhalb des Solenoids an einem Quarzfaden ebenfalls in der Mitte genau in der Achse des Solenoids aufgehängt. Die Achse des letzteren ergab sich durch zwei kreuzweise an den beiden Enden des Solenoids gespannte Fäden. Die Visierlinie der beiden Kreuzungspunkte bildete die Achse. Die ganze An-

ordnung für die Messung ist aus Fig. 7, Taf. II zu ersehen. Die Drehungen des Magneten wurden mit einem kleinen Ableserohr auf einer Skala beobachtet, die im Spiegel des Magneten abzulesen war.

Durch Gleichsetzung der Wirkung beider Stromkreise ergab sich H für jede Wickelung. Es war:

$$H_1 = 11,566 J,$$

$$H_2 = 11,595 J,$$

daher

$$H = H_1 + H_2 = 23,161 J.$$

Dieser Wert weicht um 1 Promille vom Buchererschen ab. Ich habe die Bestimmung von H nur in der Mitte des Solenoids ausgeführt, da alle meine Aufnahmen stets an der gleichen Stelle gemacht wurden. Diesen Wert von H konnte ich ohne weiteres in meine Berechnungen einsetzen, da ich die Größe des erdmagnetischen Feldes nicht zu berücksichtigen brauchte. Ich hatte nämlich für alle meine Untersuchungen Doppelkurven hergestellt, so daß sich der Erdmagnetismus durch Addition und Subtraktion kompensieren mußte. Die Richtung des Solenoidfeldes war in die horizontale Komponente des Erdmagnetismus gestellt.

Als Stromquelle benutzte ich bei meinen Versuchen den städtischen Strom, der infolge seiner Schwankungen ständig reguliert werden mußte. Ein Siemenssches Präzisions-, Milli-, Volt- und Amperemeter diente zum Ablesen der gewünschten Stromstärke.

Die Versuche und Resultate.

Als ich im vorigen Herbste mit meinen Aufnahmen begann, hatte mein Apparat zunächst noch nicht die Form, die bei den endgültigen Versuchen gebraucht wurde. Zu einem vorläufigen Versuche reichte er jedoch hin, um dann auf Grund der daran gemachten Erfahrungen umgebaut zu werden. Meinen eigentlichen Untersuchungen hat der in den vorhergehenden Zeilen beschriebene Apparat gedient. Die größte Sorgfalt wurde beim Zusammensetzen des Kondensators darauf verwendet, daß zwischen den Kondensatorplatten und den Quarzplättchen sich keine Staubteilchen befanden. Denn geringe

Verunreinigungen hätten einen größeren Abstand zwischen den Kondensatorplatten bedingt und somit die Annahme eines zu großen Wertes für das elektrostatische Feld. Fernerhin wurde ein genaues Übereinanderlagern der beiden Kondensatorplatten dadurch erreicht, daß der Kondensator zwischen sechs zylindrischen und parallel stehenden Messingzapfen zusammengesetzt wurde. Die Zapfen waren auf einer Platte derart aufgeschraubt, daß die beiden vollkommen gleich großen Kondensatorplatten ohne Spielraum sich hineinschieben ließen (vgl. Figg. 5a und 5b, Taf. I). Waren die Platten zwischen den Zapfen aufeinandergelegt, so wurden genau über den vier Quarzplatten die Klemmen festgeschraubt, die den Kondensator zusammenhielten. Durch diese Anordnung der Klemmen über den Quarzplatten wurde jede Durchbiegung des Kondensators vermieden. Die beiden vorderen Klemmen waren durch hinreichend dicke Glimmerplatten vollkommen isoliert befestigt. Die beiden anderen waren derartig angebracht, daß eine mit der unteren Kondensatorplatte, die andere mit der oberen leitend verbunden war. Von der gegenüber liegenden Platte waren sie durch farblosen Glimmer isoliert. War der Kondensator soweit zusammengesetzt, so wurde außerhalb des Hilfsapparates das Radiumkorn mittels Wachs auf der einen Seite der Längsachse des Kondensators genau in der Höhe des Spaltes möglichst nahe an diesem befestigt (vgl. Fig. 1, Taf. I). Die Strahlungsquelle bestand aus Radiumfluorid in der angenäherten Form einer Kugel. Ursprünglich war das Radiumpräparat ein Bromid, das aber zur Erzielung einer größeren Intensität bei kleinerem Volumen durch Fluorwasserstoffsäure in das Fluorid übergeführt worden war. Um nun ein möglichst kleines Volumen zu erhalten, wurde das Radiumkorn mit einem glühenden Platinfaden geschmolzen, wobei es in Form eines Ellipsoids am Drahte haften blieb. Ein Überhitzen des Drahtes war zu vermeiden, da sonst das Salz leicht verdampft wäre. Bei diesem Prozesse verlor das Präparat den größten Teil seiner Intensität. Nach zwei Wochen war ungefähr die halbe, nach fünf Wochen die volle Leuchtkraft wieder vorhanden.

Der fertig zusammengesetzte Kondensator wurde nun in der Messinghülse festgeschraubt und diese (Fig. 4, Taf. I) in den Glaszylinder eingesetzt. Die beiden hinteren Klemmen

des Kondensators besaßen noch je eine Befestigungsschraube, an die die beiden Platindrähte angelegt wurden, um die Verbindung zur Akkumulatorenbatterie herzustellen. Das Glasgefäß war gegen Eindringen des Tageslichtes durch einen dichten Lacküberzug und durch Isolierband vollkommen gesichert.

Nach diesen Vorbereitungen konnte zur Ausführung der eigentlichen Versuche geschritten werden. Die photographische Platte wurde in der Dunkelkammer eingelegt, der Apparat ins Solenoid eingeschoben und die Pumpen in Gang gesetzt. Durch die Vorpumpe war ein schnelles Einschalten der Gädepumpe gesichert, so daß nach 5—8 Min. schon das höchste Vakuum erreicht war. Schwierigkeiten mit dem Abdichten der Hähne sowie des Deckels auf meinem Glaszylinder habe ich nicht gehabt, vorausgesetzt, daß bei jedem Versuche auf ein gutes Einfetten aller in Frage kommenden Teile Rücksicht genommen wurde. Ich bediente mich hierbei einer zähen Lösung von Gummi in Vaseline.

Nach $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ stündigem Auspumpen konnte ich dann die Felder zum Versuche anlegen. Jedenfalls wurde nie ein Versuch begonnen, ohne nicht zuvor das höchste Vakuum erreicht zu haben. Dieses wurde festgestellt durch eine am Zuleitungsrohre angeschmolzene Geissleröhre, bei der das Verschwinden der Röntgenstrahlen ein gutes Vakuum anzeigte. Dieses blieb während des ganzen Versuches gleich hoch. Ein Untersuchen der Gasdichte während einer Aufnahme konnte jedoch nur dann stattfinden, wenn durch einen Glashahn der eigentliche Apparat vom Zuleitungsrohre getrennt war. Geschah dies nicht, so fand am Kondensator ein, wenn auch nur für die Zeit des Funkenüberganges dauernder Ausgleich der Potentialdifferenz statt. Dieses stellte ich in einer besonderen Untersuchung mit einem Galvanometer fest. Auch wurde durch das Leuchten der Gasionen die Platte bei diesem Vorgange belichtet. Die Dauer der einzelnen Aufnahmen richtete sich nach der Geschwindigkeit der gerade gewünschten Becquerelstrahlen und ferner nach dem jeweiligen Abstände zwischen Kondensator und photographischer Platte. Eine große Rolle für die Belichtungsdauer spielte außerdem noch die Empfindlichkeit der photographischen Platte selbst. Dem Entgegen-

kommen der Firma Westendorp & Wehner in Köln habe ich es zu danken, daß ich für meine Experimente ein sehr vorzügliches Material erhielt, wodurch mir meine Versuche sehr erleichtert wurden. Im allgemeinen dauerte die Aufnahme einer Doppelkurve für meine endgültigen Versuche 9—10 Stunden. Nach den ersten orientierenden Versuchen hatte ich zunächst die Absicht, Aufnahmen in einer Entfernung von 5—7 cm vom Kondensator zu machen. Je ein Versuch im Abstände von 6 und 7 cm bei einer Belichtungsdauer von je $5\frac{1}{2}$ Stunden für $\beta = 0,7$ zeigte mir jedoch, daß die Kurven für diese Entfernung infolge allzu großer Streuung zu breit und verwaschen wurden, so daß an ein genaues Messen nicht zu denken war. (Aufnahme Nr. 8, Taf. II, möge den Versuch für $\beta = 0,7$ und $a = 6$ cm darstellen.) Aus vielfachen Versuchen habe ich die Überzeugung gewonnen, daß bei einer weniger engen Kondensatoröffnung selbst bei 50 mm Abstand keine brauchbare radiographische Fixierung mehr möglich ist. Bei einem Abstände von 6—7 cm habe ich noch die Beobachtung gemacht, daß die bei näheren Aufnahmen nur als eine Linie erscheinende Mittellinie in drei Komponenten zerlegt war. Die mittlere rührte von den unablenkbaren γ -Strahlen her, während die beiden äußeren von den positiven α -Strahlen gebildet wurden. Bei noch größerer Entfernung vom Kondensator sowie bei geeigneter Wahl der Felder ließen sich mit den α -Strahlen, den positiv geladenen Heliumatomen, wohl ähnliche Versuche anstellen, wie es bisher mit den β -Strahlen, den negativen Elektronen, geschah. Jedenfalls wären auch dies recht interessante und vielleicht fruchtbare Untersuchungen. Die Dimensionen meines Apparates ließen Experimente nach dieser Richtung leider nicht zu.

Die Erkenntnis, daß mit großem Abstände eine allzu große Streuung der abgelenkten Strahlen verbunden war, brachte mich dazu, meine Aufnahmen bei einem Abstände von 4 und 5 cm vom Kondensator auszuführen. Jedenfalls erhielt ich bei diesen Entfernungen Kurven, die an Schärfe sowie Feinheit der Zeichnung die bisher bekannten Aufnahmen dieser Art übertreffen (vgl. Taf. II). Plattenfehler irgendwelcher Art habe ich bei meinen Untersuchungen nie bemerkt. Ich brauchte daher aus diesem Grunde keine Aufnahmen auszuschneiden.

Ein Loslösen der Emulsion vom Glase infolge des hohen Vakuums habe ich auch nicht beobachtet. Ein genaues und sicheres Messen der Kurven war hierdurch gewährleistet und somit auch eine möglichst genaue Bestimmung der spezifischen Ladung der Elektronen. Durch öfteres Wechseln und Neueinstellen der Abstände zwischen Platte und Kondensator, sowie durch mehrmalige Neuversilberung der Kondensatorplatten, glaube ich alle Fehler, die jedoch bei der Sorgfalt der Messungen nur verschwindend klein sein können, möglichst ausgeglichen zu haben. Temperatur sowie Barometerstand hatten auf den Gang der Versuche keinen Einfluß und wurden daher weiter nicht in Betracht gezogen. Es wäre nur zu bemerken, daß für die Dauer eines Versuches eine Temperaturschwankung nur sehr gering sein konnte, da die Dicke der Mauern des Bonner physikalischen Instituts nur langsam einen Ausgleich zwischen der äußeren und der Zimmertemperatur vollziehen ließen. Höchstens um $2-3^\circ \text{C}$. könnte es sich hierbei handeln und diese spielen keine Rolle.

War die äußere Hülse des Messingapparates für eine Entfernung festgeschraubt, so wurden für diesen Abstand hintereinander mit verschiedenen Geschwindigkeiten der β -Strahlen Aufnahmen gemacht. Vor und nach den Versuchen stellte ich mit einem geprüften Normalmeter auf einem Komparator den Abstand zwischen Kondensator und photographischer Platte fest. Die Reihe der Beobachtungen stimmten innerhalb der Beobachtungsfehler stets überein; auf jeden Fall blieben sie innerhalb einer Fehlergrenze von $1/5-2/5$ Promille der zu untersuchenden Strecke.

Aus den Apparatkonstanten sowie aus den Messungen ergaben sich die Resultate.

Es war für eine Versuchsreihe:

Nr.	a	β	V	H	z in mm	$\left(\frac{e}{m_0}\right)$ für $p=0$
9	40,350	0,51475	492,73	127,39	10,68	$1,7346 \times 10^7$
11	40,350	0,61453	577,57	125,07	7,84	$1,7341 \times 10^7$
10	40,350	0,69651	654,80	125,07	6,21	$1,7350 \times 10^7$

Eine Änderung des Abstandes a lieferte eine zweite Reihe.

Nr.	a	β	V	H	z in mm	$\left(\frac{e}{m_0}\right)$ für $p=0$
12	50,387	0,50272	411,22	108,86	15,00	$1,7396 \times 10^7$
13	50,387	0,50721	490,90	123,91	16,23	$1,7399 \times 10^7$

Aus diesen beiden Versuchsreihen wurden nun nach der eingangs entwickelten Methode die Werte für p und e/m_0 für gleiche β -Werte berechnet. Versuch Nr. 9 ließ sich mit Nr. 12 gleichsetzen. Es wurde hierfür $p = 0,350$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7620 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5.$$

Ferner ergab ein Vergleich von Nr. 9 und Nr. 13 $p = 0,350$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7621 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5.$$

Setzte ich diesen Wert von p auch in die Berechnungen von Nr. 10 und Nr. 11 ein, was ich nach den Erfahrungen der folgenden Versuche tun konnte, ohne einen großen Fehler zu begehen, so erhielt ich für alle Werte der beiden Versuchsreihen:

$$\text{Nr. 9 und 12} \quad \beta = 0,5 \quad \frac{e}{m_0} = 1,7620 \times 10^7$$

$$\text{Nr. 9 „ 13} \quad \beta = 0,5 \quad \frac{e}{m_0} = 1,7621 \times 10^7$$

$$\text{Nr. 11} \quad \beta = 0,6 \quad \frac{e}{m_0} = 1,7635 \times 10^7$$

$$\text{Nr. 10} \quad \beta = 0,7 \quad \frac{e}{m_0} = 1,7648 \times 10^7.$$

Nach diesen Versuchen wurde eine Neuversilberung des Kondensators vorgenommen und damit ein anderes p erzielt. Es ergab sich:

Nr.	a	β	V	H	z in mm	$\left(\frac{e}{m_0}\right)$ für $p=0$
16	50,450	0,50230	410,88	108,86	14,98	$1,7269 \times 10^7$
15	50,450	0,60091	575,22	127,39	13,27	$1,7267 \times 10^7$
14	50,450	0,70382	655,35	123,91	9,50	$1,7294 \times 10^7$

Jetzt wurde der Abstand a geändert, wodurch eine neue Versuchsreihe gefunden wurde.

Nr.	a	β	V	H	π in mm	$\left(\frac{e}{m_0}\right)$ für $p=0$
17	40,660	0,51458	492,58	127,39	10,75	$1,7180 \times 10^7$
21	40,660	0,50461	329,34	86,854	7,251	$1,7164 \times 10^7$
19	40,660	0,69647	654,57	125,07	6,25	$1,7196 \times 10^7$

Vergleicht man Versuch Nr. 16 und Nr. 17, so ist $p = 0,541$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7615 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5.$$

Nr. 16 und Nr. 21 ergaben $p = 0,540$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7614 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5.$$

Aus den Versuchen Nr. 14 und Nr. 19, bei denen die durchschnittliche Ablenkung z kleiner war, ergab sich $p = 0,562$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7672 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,7.$$

Ich konnte daher auch den Mittelwert von $p = 0,551$ in die Lorentzsche Formel für Versuch Nr. 15 einsetzen und fand:

$$\frac{e}{m_0} = 1,7625 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,6.$$

Ein Blick auf die beiden gefundenen Reihen für e/m_0 zeigt nun, daß mit steigender Geschwindigkeit von β auch die e/m_0 -Werte um einen geringen Betrag zunehmen. Da nun alle Versuche darauf hinzielten, mit den gegebenen Feldern eine möglichst große Ablenkung zu erhalten, um hierdurch die prozentischen Beobachtungsfehler bei den Messungen von z geringer zu machen, so war zunächst bei den bisherigen Aufnahmen nicht Rücksicht darauf genommen worden, daß die Theorie für die Kondensatorrandkorrektur nur für kleine Ablenkungen Gültigkeit hat, was A. H. Bucherer schon in seiner Arbeit l. c. p. 522 besonders hervorgehoben hatte. Es war daher noch notwendig, auch für die geringere Geschwindigkeit von $\beta = 0,5$ Versuche mit kleinen Ablenkungen bei ent-

sprechenden Feldern anzustellen. Zu diesem Zwecke wurde zunächst der Kondensator wiederum neu versilbert, wodurch gleichzeitig auch wieder ein anderes p bedingt wurde. Es war:

Nr.	a	β	V	H	z in mm	$\left(\frac{e}{m_0}\right)$ für $p=0$
22	49,925	0,50441	329,21	86,854	11,30	$1,7404 \times 10^7$
23	40,282	0,50441	329,21	86,854	7,192	$1,7334 \times 10^7$

Aus beiden Versuchen wurde $p = 0,404$ und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7676 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5$$

ermittelt.

Vergleicht man diesen Wert mit den früher erhaltenen, so erkennt man, daß für Strahlen von geringer Geschwindigkeit ein etwas zu niedriger Wert erzielt wird, wenn die Ablenkung, entgegen den Forderungen der Theorie, zu groß gehalten wird. Die Werte

$$\frac{e}{m_0} = 1,7676 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,5$$

und

$$\frac{e}{m_0} = 1,7672 \times 10^7 \text{ für } \beta = 0,7$$

zeigen untereinander, entsprechend der Lorentzschen Theorie, eine gute Übereinstimmung. Der Mittelwert aus diesen beiden Resultaten ist

$$\frac{e}{m_0} = 1,7674 \times 10^7.$$

Gegenüber den Werten der beiden ersten Versuchsreihen gebührt diesem letzteren Werte ein besonderer Vorrang, so daß er das Endresultat meiner Messungen darstellt. Die Genauigkeit dieses Wertes ist $\pm 1,5$ Promille.

Vorliegende Arbeit habe ich unter der Leitung von Hrn. Prof. A. H. Bucherer ausgeführt, dem ich für seine mannigfaltigen Ratschläge zu großem Danke verpflichtet bin.

Bonn, Physik. Inst., den 7. August 1909.

(Eingegangen 10. August 1909.)

**6. Untersuchungen
über die magnetischen Eigenschaften von
Magnetitkristallen;
von Victor Quittner.**

(Auszug aus der Züricher Dissertation.)

Seit der Zeit, wo man zuerst nähere Kenntnisse über die so auffallenden Eigenschaften der ferromagnetischen Stoffe erlangte, ist die Erklärung dieser Eigenschaften so recht zum Grundproblem der ganzen Lehre vom Magnetismus geworden dessen Lösung wir indes trotz der zahlreichen, seit Jahrzehnten immer wieder unternommenen Versuche bis nun noch immer nicht wesentlich näher gekommen sind.

Auf einem ganz neuen Wege versuchte vor mehr als einem Jahrzehnt Hr. P. Weiss der Lösung dieses Problems näher zu kommen. Sein Gedankengang war der folgende: alle bekannten ferromagnetischen Körper besitzen ein kristallinisches Gefüge, sie bestehen also aus einer Unzahl von einzelnen mikroskopisch kleinen Kristallen, die ungeordnet durcheinander liegen. Es wäre nun sehr wohl denkbar, daß die Kompliziertheit der magnetischen Eigenschaften dieser Stoffe ihren Grund ganz oder zum Teil nur in diesem zusammengesetzten Bau hat, und daß die Verhältnisse an einem einzelnen Kristall bedeutend einfacher und leichter zu überblicken wären. Die Eigenschaften der gewöhnlichen kristallinen Stoffe müßten dann aus denen des einzelnen Kristalles durch Mittelwertbildung über alle Richtungen des Raumes berechnet werden. Nachdem schöne Kristalle von metallischem Eisen nur sehr schwer zu erhalten sind, so wählte Hr. Weiss bereits für seine erste, vor mehr als zehn Jahren ausgeführte Untersuchung über ferromagnetische Kristalle den ebenso wie

metallisches Eisen im regulären System kristallisierenden Magnetisenstein als Versuchsmaterial.¹⁾

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den Magnetismus der Kristalle waren auch früher schon in ziemlich großer Zahl ausgeführt worden. Was speziell die theoretische Seite betrifft, so galt ziemlich allgemein die Meinung, daß diese durch die klassische Untersuchung von W. Thomson²⁾ vollständig erledigt sei. Thomson ging bei seiner Ableitung der kristallmagnetischen Eigenschaften von der bekannten Theorie des „Tensortripels“ aus, wie sie heute allgemein zur Erklärung aller physikalischen Eigenschaften anisotroper Körper benutzt wird. Er zeigte, wie man (unter der Voraussetzung, daß die Permeabilität in den einzelnen Richtungen verschieden, in jeder aber unabhängig von der Feldstärke sei) die Permeabilitäten in den einzelnen Richtungen durch die Radienvektoren eines Ellipsoides darstellen kann, und daß zur vollständigen Charakterisierung der Substanz in magnetischer Beziehung nur die Kenntnis der drei Hauptachsen dieses Ellipsoides (der drei Hauptpermeabilitäten) erforderlich ist. Für den Fall des regulär kristallisierenden Stoffes geht das Ellipsoid in eine Kugel über, die Substanz verhält sich in magnetischer Beziehung isotrop. Da bekanntlich dasselbe auch für die sonstigen physikalischen Eigenschaften der regulär kristallisierenden Körper zutrifft, so hat man sich allgemach daran gewöhnt, die Begriffe „regulär kristallisiert“ und „isotrop“ als gleichbedeutend anzusehen. Es erregte daher allgemein großes Erstaunen, als Weiss in der vorerwähnten Arbeit den Beweis erbrachte, daß der regulär kristallisierte Magnetit sich in magnetischer Hinsicht keineswegs wie eine isotrope Substanz verhält. Wenn man die Sache aber näher betrachtet, so sieht man, daß ein solches Verhalten eigentlich zu erwarten war, denn die ganze Darstellung der magnetischen

1) P. Weiss, Thèses présentées à la Faculté des Sciences Paris 1896. — Seitdem wurden im Laboratorium von Hrn. Prof. Weiss in Zürich auch einige Messungen an allerdings sehr kleinen Kristallen von metallischem Eisen gemacht; die dabei erhaltenen Resultate stimmen im wesentlichen mit den am Magnetit erhaltenen überein.

2) W. Thomson, Rep. Brit. Assoc. 2. p. 23. 1850; Phil. Mag. 1. p. 1. 1851; Ges. Abb. p. 449.

Verhältnisse durch das Permeabilitätsellipsoid gilt ja nur unter der Voraussetzung konstanter Permeabilität in jeder Richtung; da diese Voraussetzung beim Magnetit wie bei allen ferromagnetischen Stoffen auch nicht annähernd zutrifft, so fällt für diese Stoffe die ganze darauf aufgebaute Theorie in sich zusammen, und es besteht gar kein Grund für die Annahme, daß der regulär kristallisierende Körper sich wie eine isotrope Substanz verhalten sollte.

Was nun die von Weiss erhaltenen Resultate betrifft so muß ich mich darauf beschränken, nur das Wichtigste hervorzuheben. Zunächst wurden die Magnetisierungskurven von Stäbchen bestimmt, die senkrecht zur Fläche des Würfels, des Oktaeders und des Granatoeders aus dem zu untersuchenden Kristall geschnitten waren. Bei mittleren Werten der Feldstärke lagen die der Oktaeder- und Granatoedernormale zugehörigen Kurven bedeutend höher als die zur Würfelnormale gehörige; in stärkeren Feldern näherten sich die Kurven wieder, und die Sättigung, die bei $H = 500$ fast erreicht war, hatte für alle Richtungen genau den gleichen Wert. In schwachen Feldern traten Unregelmäßigkeiten ein, auf die hier nicht eingegangen zu werden braucht, da gerade die Untersuchung dieser Erscheinungen einen Teil meiner eigenen Arbeit bildet. — Weiter wurden dann auch Messungen an Platten ausgeführt, die parallel der Fläche des Würfels, des Oktaeders und des Granatoeders geschnitten waren. In den Würfelplatten fiel die Richtung der Magnetisierung nur für die Seiten und Diagonalen des Quadrates mit der des Feldes zusammen; in allen zwischenliegenden Richtungen schlossen beide einen Winkel miteinander ein, so daß man eine dem Feld parallele und eine zu ihm normale Komponente der Magnetisierung unterscheiden konnte, von denen aber nur die letztere gemessen wurde. Diese bildete von $0-180^\circ$ zwei vollständige Wellen mit vier Nullpunkten (zwei Achsen, zwei Diagonalen), wobei sie in jedem Nullpunkte ihr Vorzeichen änderte. In den Granatoederplatten wechselten entsprechend den schräg zueinander stehenden Achsen Wellen von 75° mit solchen von 105° ab. In den Oktaederplatten endlich war die normale Komponente der Magnetisierung so klein und verlief so unregelmäßig, daß Hr. Weiss zu der Meinung ge-

langte, die in diesen Platten beobachteten Erscheinungen rührten nur von der nicht genügend genauen Orientierung der Platten her, und eine absolut genaue Oktaederplatte wäre vollkommen isotrop. Durch meine eigenen Messungen, deren Ergebnisse im folgenden mitgeteilt werden, hat sich indes ergeben, daß diese Meinung nicht der Wahrheit entspricht. Übrigens zeigten auch die Würfelplatten der Weiss'schen Messungen starke Abweichungen zwischen den einzelnen Wellen, die, wie sich gleichfalls im Verlaufe meiner Untersuchungen ergab, auch durchaus nicht von einer etwaigen Ungenauigkeit in der Herstellung der Platten herrühren.

Einige Jahre später führte Hr. P. Weiss noch eine ähnliche Untersuchung, aber mit viel vollkommeneren Mitteln am Magnetkies oder Pyrrhotin, einem dem Aussehen nach hexagonal kristallisierenden Mineral von der ungefähren Zusammensetzung Fe_7S_8 durch, die zu außerordentlich interessanten Resultaten führte.¹⁾

Die vorliegende Arbeit wurde gleichfalls auf Veranlassung von Hrn. Prof. P. Weiss in dessen Laboratorium in Zürich ausgeführt. Sie bildet eine Weiterführung der vorerwähnten ersten Untersuchung über Magnetit; zugleich sollte versucht werden, ob es nicht möglich wäre, auch für den Magnetit so einfache Resultate zu erhalten, wie es in der eben erwähnten Arbeit für den Pyrrhotin gelungen war. Diese Hoffnung wurde indes nicht erfüllt. Es zeigte sich, daß der Magnetit, trotz seiner regulären Kristallform, viel komplizierter in seinem inneren Bau ist als der Pyrrhotin. Immerhin gelang es doch zu einer Vorstellung dieses Baues zu gelangen und einige interessante Einblicke in die Eigenschaften der ferromagnetischen Kristalle und das Wesen des Ferromagnetismus überhaupt zu gewinnen.

Experimenteller Teil.

1. Untersuchungsmaterial, Methoden und Apparate.

Die Untersuchungen wurden zum weitaus größten Teile an kreisrunden Platten ausgeführt, die parallel der Fläche des

1) P. Weiss, *Journal de Phys.* 4. p. 836. 1905. Davon wird im theoretischen Teil dieser Arbeit noch die Rede sein.

Würfels oder Oktaeders aus dem zu untersuchenden Kristall geschnitten waren (Granatoederplatten wurden nur wenig verwendet). Der Durchmesser der Platten schwankte zwischen 12 und 20 mm, ihre Dicke zwischen 0,1 und 0,3 mm. Auf gleiche Dicke der Platten an allen Stellen wurde besonderer Wert gelegt, ebenso auf genau kreisrunde Gestalt. Das Volumen der einzelnen Platten wurde aus ihrem Gewicht und dem an einem größeren Stück desselben Kristalles gemessenen spezifischen Gewichte bestimmt; letzteres variierte bei den einzelnen untersuchten Kristallen zwischen 5,08 und 5,25. Die äußerst zerbrechlichen Platten waren mit Kanadabalsam zwischen zwei Glasplatten geklebt, und wurden so in die im folgenden beschriebenen Apparate gebracht.

Die Beschaffung des erforderlichen Materiales verursachte bedeutende Schwierigkeiten. Obwohl bekanntlich schöne Kristalle von Magnetit keineswegs selten sind, so findet man doch nicht oft Exemplare, die die notwendige Größe von mindestens 2—3 cm in jeder Richtung aufweisen und dabei vollkommen gleichmäßig und homogen im Innern sind. Die schönen derartigen Stücke befinden sich fast alle in Museen, aus denen sie begreiflicherweise für Untersuchungen, die ein Zerschneiden in Platten erfordern, nicht zu haben sind. Nach vielem Suchen gelang es mir endlich, vier geeignete Kristalle zu erlangen, an denen die sämtlichen Messungen ausgeführt wurden.

Die Messungen selbst wurden nach zwei durchaus verschiedenen Methoden ausgeführt, entweder mittels des ballistischen Galvanometers oder durch Bestimmung des Drehmomentes, das im Magnetfeld auf die geeignet aufgehängte Platte ausgeübt wird. Wie bereits erwähnt, fällt im Kristall im allgemeinen die Richtung der Magnetisierung nicht mit der des Feldes, durch das sie hervorgerufen wird, zusammen. Bei Anwendung von dünnen Platten wie bei den von mir ausgeführten Messungen kann man indes stets mit genügender Genauigkeit annehmen, daß die Komponente der Magnetisierung senkrecht zur Ebene der Platte durch das starke entmagnetisierende Feld vernichtet wird. Was das äußere Feld betrifft, so wurde es bei allen Versuchen in die Plattenebene gelegt und in dieser nacheinander in alle möglichen Richtungen ge-

bracht. Für jede Lage des Feldes wurden die ihm parallele (mit ihm in Richtung zusammenfallende) und die zu ihm normale Komponente der Magnetisierungsintensität gemessen, wodurch diese selbst ihrer Größe und Richtung nach bestimmt ist.

Die dem Feld parallele Komponente der Magnetisierung wurde fast ausschließlich mit der ballistischen Methode gemessen. Zu ihrer Anwendung diente der in Fig. 1 dargestellte Apparat. Das von der Magnetisierungsspule *J* erzeugte Feld, dessen Stärke bis 1800 Gauss gesteigert werden kann, ist innerhalb einer um den Mittelpunkt gelegten Kugel von reichlich 5 cm Durchmesser fast vollkommen gleichmäßig. Im Innern dieser Spule befindet sich die mit 5000 Windungen von 0,5 mm starkem Draht bewickelte Induktionsspule *K*. An den Hohlraum dieser kleineren Spule schließt sich oben das Messingrohr *N* an, in das der (in der Figur rechts gezeichnete) 40 cm lange und 32 mm dicke Zylinder *O* aus hartem Holz eingeführt werden kann. Der Zylinder trägt an seinem unteren Ende das runde Kupferstück *T*, auf welchem sich die gleichfalls aus Kupfer bestehende Scheibe *A* um eine horizontale Achse drehen kann. Die Verdrehung der Scheibe *A* kann auch, wenn der Zylinder in das Rohr hineingesteckt ist, von oben aus mit Hilfe des Schurlaufes *B* und des Drehknopfes *C* bewirkt werden. Der Stift *R* verhindert ein zu tiefes Eindringen des Holzzylinders in das Messingrohr. Auf der Kupferscheibe *A* wird die zu untersuchende Magnetitplatte *P* befestigt, indem der auf ihr angeklebte kleine Ebonitklotz *H* unter den auf der Platte befindlichen Bügel *D* aus Kupferblech geklemmt wird. Die jeweilige Lage der Platte gegenüber dem Magnetfeld kann an der auf der Scheibe *A* befindlichen Winkelteilung abgelesen werden. Die Scheibe *A* ist auf dem Holzzylinder so angebracht, daß die untersuchte Magnetitplatte stets genau in den Mittelpunkt der beiden Spulen *J* und *K* zu liegen kommt.

Die Messungen werden in folgender Weise ausgeführt: man schickt einen Strom in die Spule *J* und erzeugt so in ihrem Innern ein Feld von bekannter Stärke. Nun stellt man die Scheibe *A* auf einen bestimmten Winkel ein verbindet das ballistische Galvanometer mit der Sekundärspule *K* und läßt

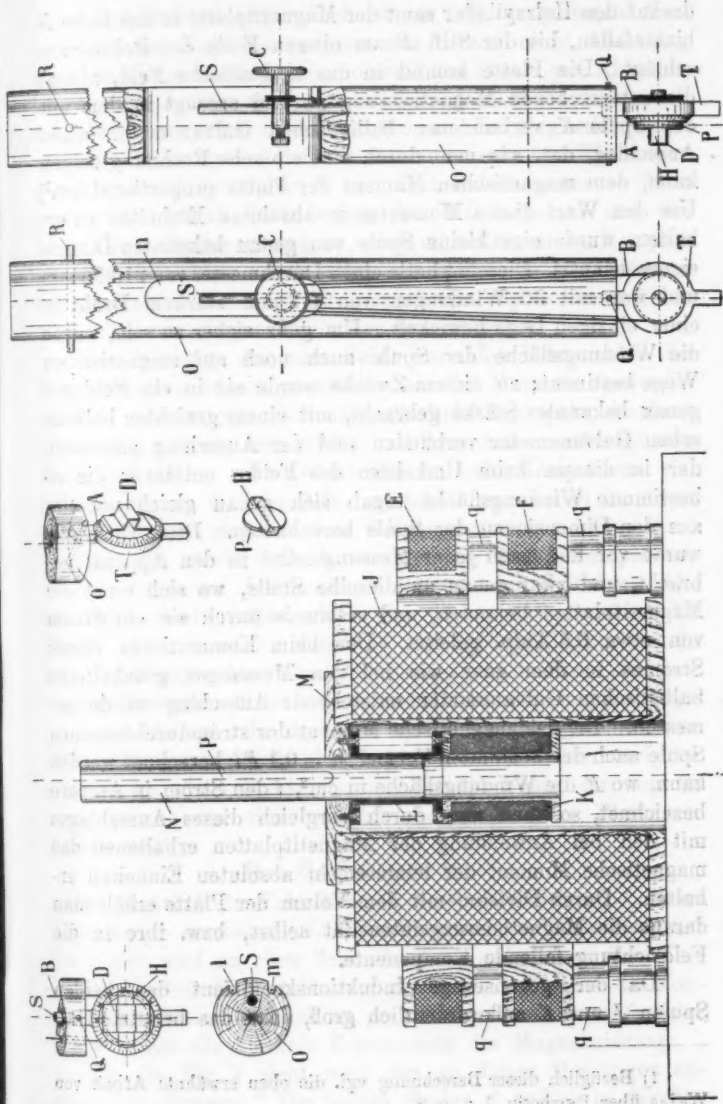


Fig. 1. Apparat zur ballistischen Methode (Maßstab 1:5,6, für die Details 1:2,8).

darauf den Holzzylinder samt der Magnetitplatte in das Rohr *N* hineinfallen, bis der Stift *R* am oberen Ende des Rohres anschlägt. Die Platte kommt in das magnetische Feld, nimmt die entsprechende Magnetisierung an und erzeugt in dem mit der Spule *K* verbundenen ballistischen Galvanometer einen Ausschlag, der, wie man durch eine einfache Rechnung zeigen kann, dem magnetischen Moment der Platte proportional ist.¹⁾ Um den Wert dieses Momentes in absoluten Einheiten zu erhalten, wurde eine kleine Spule von genau bekannten Dimensionen benutzt. Dieselbe hatte einen Durchmesser von 21,990 mm und war mit 50 Windungen von 0,2 mm starkem Draht in einer einzigen Lage bewickelt. Um ganz sicher zu sein, wurde die Windungsfläche der Spule auch noch auf magnetischem Wege bestimmt; zu diesem Zwecke wurde sie in ein Feld von genau bekannter Stärke gebracht, mit einem geeichten ballistischen Galvanometer verbunden und der Ausschlag gemessen, der in diesem beim Umkehren des Feldes entstand; die so bestimmte Windungsfläche ergab sich genau gleich mit der aus den Dimensionen der Spule berechneten. Diese Eichspule wurde vor und nach jeder Messungsreihe in den Apparat gebracht, und zwar genau an dieselbe Stelle, wo sich sonst die Magnetitplatten befanden, und es wurde durch sie ein Strom von etwa 0,5 Amp. geleitet. Der beim Kommutieren dieses Stromes in dem ganz wie bei den Messungen geschalteten ballistischen Galvanometer entstehende Ausschlag wurde gemessen. Da das magnetische Moment der stromdurchflossenen Spule nach der bekannten Formel $M = 0,1 F i$ berechnet werden kann, wo F die Windungsfläche in cm^2 , i den Strom in Ampere bezeichnet, so kann man durch Vergleich dieses Ausschlages mit den bei Anwendung der Magnetitplatten erhaltenen das magnetische Moment der letzteren in absoluten Einheiten erhalten. Durch Division mit dem Volum der Platte erhält man daraus die Magnetisierungsintensität selbst, bzw. ihre in die Feldrichtung fallende Komponente.

Da der gegenseitige Induktionskoeffizient der beiden Spulen *J* und *K* außerordentlich groß, dazu das benutzte Gal-

1) Bezüglich dieser Berechnung vgl. die oben erwähnte Arbeit von Weiss über Pyrrhotin, l. c. p. 9.

vanometer äußerst empfindlich ist, so ruft die geringste Veränderung des Magnetisierungsstromes bereits einen Ausschlag über die ganze Skala hervor; obwohl der Strom von Akkumulatoren entnommen wurde, war ein ungestörtes Arbeiten unmöglich. Es wurden deshalb außen um die Magnetisierungsspule die beiden Spulen E, F mit zusammen etwa 600 Windungen gelegt und mit der Spule K und dem Galvanometer in Serie geschaltet. Durch Veränderung der Windungszahl und der Lage dieser Spulen gelang es, eine so vollkommene Kompensation zu erreichen, daß selbst ein plötzliches Unterbrechen des Maximalstromes von 30 Amp. in der Spule J nur einen Ausschlag von einigen Millimeter hervorbrachte.

Zur Messung der zum Felde normalen Komponente der Magnetisierung könnte gleichfalls dieselbe Methode verwendet werden; es wäre nur notwendig, die Induktionsspule, die dann natürlich zweiteilig sein müßte, mit ihrer Achse senkrecht zum Felde zu stellen. Da jedoch die normale Komponente viel kleiner ist als die parallele, so erhält man selbst in einem außerordentlich empfindlichen Galvanometer nur kleine Ausschläge. Es wurde deshalb zur Messung dieser Komponente die im folgenden beschriebene weitaus empfindlichere Ablenkungsmethode angewendet. Bei dieser Methode wird die Platte in horizontaler Lage in das gleichfalls horizontale Magnetfeld gebracht. Eine vollkommen runde Platte aus isotropem Material würde unter diesen Umständen in jeder Lage in Ruhe bleiben. In der aus einem Kristall geschnittenen Platte dagegen schließt die Richtung der Magnetisierung im allgemeinen einen Winkel φ mit der des Feldes ein, und es wird auf die um eine vertikale Achse drehbare Platte ein Drehmoment

$$D = H v J \sin \varphi = H v J_n$$

wirken, wobei H die Feldstärke, J die Magnetisierung, J_n deren Komponente normal zu H , v das Volumen der Platte bedeutet. Die Platte wird an einer Schraubenfeder aufgehängt, ihre Verdrehung mittels Spiegelablesung gemessen, und wenn die Konstante der Feder bekannt ist, so erhält man so in einfachster Weise direkt die normale Komponente der Magnetisierung.

In der Fig. 2 sieht man den zu diesen Messungen angewandten Apparat. Die beiden Spulen S_1 und S_2 in der An-

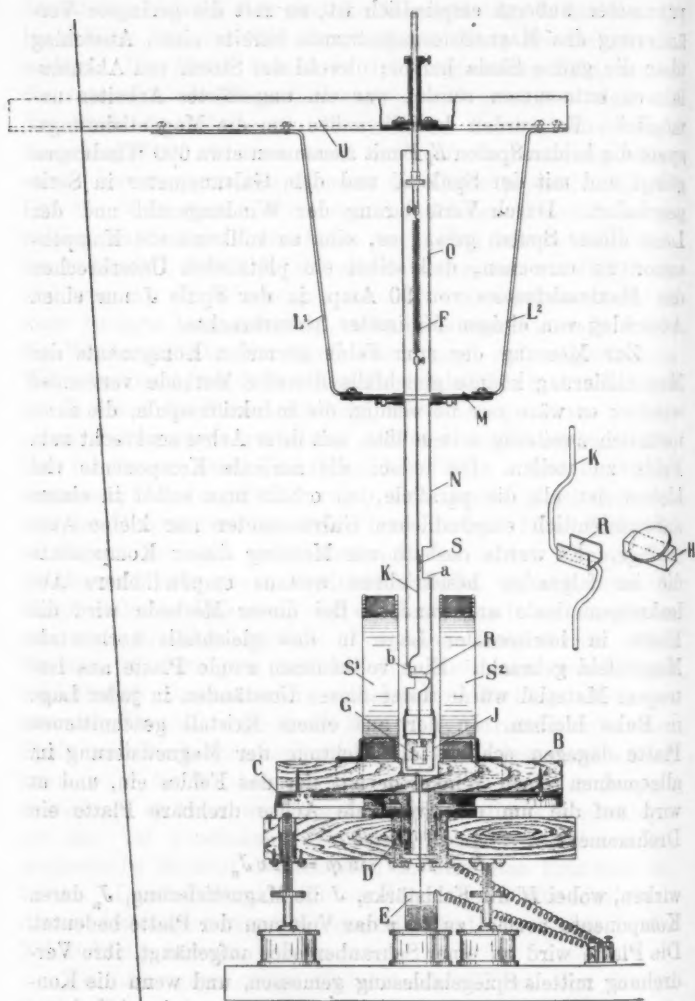


Fig. 2. Apparat für die Ablenkungsmethode (Maßstab 1:9,5).

ordnung von Helmholtz erzeugen in ihrem Innern ein sehr homogenes Feld. Sie stehen auf der Messingplatte *C* und sind mit dieser in dem Spurlager *D* drehbar. Am Rande der Scheibe *C* befindet sich eine Gradteilung, an der die jeweilige Stellung des Magnetfeldes abgelesen werden kann. Im Mittelpunkt der beiden Spulen hängt die Magnetitplatte an dem langen, in der Mitte doppelt gebogenen Kupferdraht *K*, indem sie mit ihrem Ebonitklotz *H* in die auf dem Draht angelötete Rinne *R* aus Kupferblech eingeschoben wird. Der Draht selbst hängt an der Feder *F* und trägt den zur Ablesung der Verdrehungen dienenden Spiegel *S*. Am unteren Ende des Drahtes hängt ein Gewicht *G*, das dem ganzen System die nötige Stabilität verleiht und gleichzeitig zur Dämpfung dient, indem es in das mit Glyzerin gefüllte Gefäß *J* taucht. Das Messingrohr *N* und das oben aufgesetzte zweiteilige Rohr *O* schützen die ganze Aufhängung vor Luftströmungen. Zur Vermeidung anderweitiger Erschütterungen ist das die Aufhängung tragende starke U-Eisen *U* in einen Pfeiler des Gebäudes eingelassen.

Die Spulen *S* gestatten die Anwendung von Feldern bis etwa 150 Gauss; für stärkere Felder wurde statt ihrer ein Elektromagnet verwendet; wegen des Zylinders *N* von 3,5 cm Durchmesser konnte der Abstand der Polschuhe nicht unter 4 cm verkleinert werden; die so erzielbare Feldstärke von max. 4000 Gauss war indes für alle Messungen vollständig ausreichend.

Wenn man mit dem soeben beschriebenen Apparat die normale Komponente der Magnetisierung für verschiedene Richtungen des Feldes bestimmt, indem man die Scheibe *C* immer um je 5° weiterdreht und jedesmal die Verdrehung des Spiegels abliest, so erhält man Kurven von der Art, wie sie in Fig. 3 beispielsweise für eine Oktaederplatte dargestellt sind. Nimmt man dabei die Drehung einmal in einer, dann in der entgegengesetzten Richtung vor, so erhält man zwei annähernd gleiche Kurven, die aber in Richtung der Ordinatenachse um ein mehr oder weniger großes Stück gegeneinander verschoben erscheinen (in der Fig. sind die Drehrichtungen durch Pfeile bezeichnet). Diese Verschiebung rührt von der Hysteresis her und kann zur Messung derselben benutzt

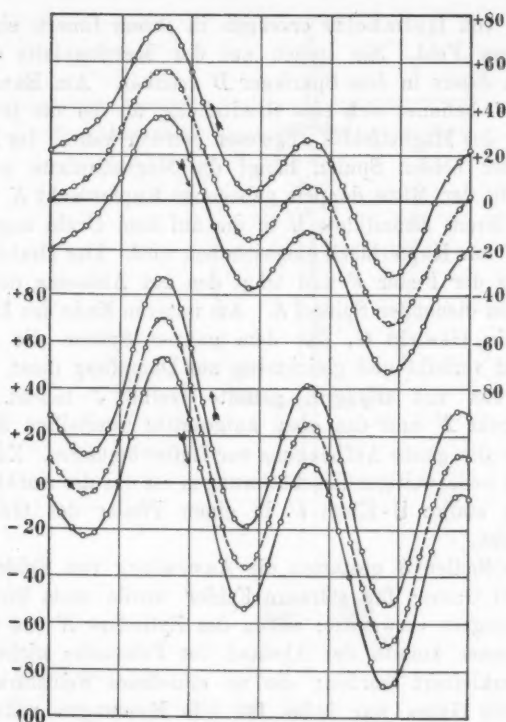


Fig. 3. Normalkomponente der Magnetisierung in einer Oktaederplatte. Oben für $H = 63,0$ Gauss, unten für $H = 78,7$ Gauss. Ordinaten in willkürlichem Maßstabe.

werden. Man erkennt das besonders klar, wenn man als Ordinaten nicht die Normalkomponente

$$J_n = \frac{D}{Hv},$$

sondern direkt die Drehmomente pro Volumeinheit $D:v$ aufträgt. Die während einer vollen Umdrehung des Feldes aufzuwendende Arbeit (auf die Volumeinheit bezogen)

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{D}{v} d\varphi$$

wird dann durch die Fläche dargestellt, die die Drehmomentenkurve mit der Abszissenachse einschließt, wobei (wenn wie in Fig. 3 die nach rechts wirkenden Momente als positiv, die nach links wirkenden als negativ bezeichnet werden) bei der Drehung des Feldes nach rechts die über der Achse liegenden Flächen positiv, die unterhalb liegenden negativ zu nehmen sind; bei der Drehung nach links ist es dann natürlich umgekehrt. Man sieht daraus, daß die Fläche zwischen den entsprechenden Kurven für Rechts- und Linksdrehung den doppelten Betrag der bei einer vollen Umdrehung aufzuwendenden Hysteresisarbeit darstellt. Die in der Mitte zwischen den beiden Kurven gelegte (in der Fig. gestrichelte) Kurve gibt dann die vom Einfluß der Hysteresis freien Werte der normalen Komponente. Dieser Vorgang wurde bei allen im folgenden beschriebenen Messungen in dieser Weise durchgeführt.

Wenn man Wert darauf legt, Magnetisierungskurven zu erhalten, die auch in ihrem unteren Teile richtig sind, so muß man den Entmagnetisierungskoeffizienten der Platten, der trotz ihrer geringen Dicke nicht vernachlässigbar ist, in Rechnung ziehen. Verlässliche Bestimmungen desselben für zylindrische dünne Platten sind meines Wissens bisher weder auf rechnerischem, noch auf experimentellem Wege ausgeführt worden; ich habe denselben deshalb auf experimentellem Wege an Eisenplatten von genau gleicher Gestalt wie die verwendeten Magnetitplatten bestimmt, und die so erhaltenen Werte zur Korrektur der Magnetisierungskurven verwendet.

2. Ergebnisse.

Schon bei den ersten Messungen, die nach den angegebenen Methoden ausgeführt wurden, zeigte sich ein sehr verschiedenes Verhalten der einzelnen Platten. Die magnetischen Eigenschaften von manchen derselben erwiesen sich als unvereinbar mit den Symmetrieeigenschaften, die dem regulären Kristallsystem zukommen; bei anderen, auch solchen aus dem gleichen Kristall waren dagegen keine derartigen Abweichungen von der Symmetrie des regulären Systems bemerkbar. Wegen dieser Abweichungen von der regulären Symmetrie haben im allgemeinen die drei kristallographischen Hauptachsen in magnetischer Hinsicht ungleiche Eigenschaften,

und man mußte deshalb darauf bedacht sein, sie voneinander zu unterscheiden. Es wurden deshalb in jedem Kristall die drei Hauptachsen mit a, b, c bezeichnet, und auf jeder Würfelplatte wurden die beiden in der Plattenebene liegenden Achsenrichtungen mit ihren Buchstaben markiert, entsprechend in den Oktaederplatten die Projektionen der Achsen in die Plattenebene, die dort den Höhen des gleichseitigen Dreieckes entsprechen.

Die im folgenden wiedergegebenen Resultate wurden (mit einer besonders hervorgehobenen Ausnahme) sämtlich an Platten aus einem und demselben Kristall erhalten; sie zeigen aufs deutlichste, wie sehr die magnetischen Eigenschaften innerhalb desselben Kristalls variieren können. Auf der linken Seite der Figg. 4 und 5 sieht man die Ergebnisse, die an einer Würfelplatte erhalten wurden. Als Abszissen sind die Winkel aufgetragen, die das Feld mit der Richtung einer der beiden Hauptachsen (Quadratseiten) einschließt, die Ordinaten geben die parallele bzw. normale Komponente der Magnetisierung in absoluten (C.G.S.)-Einheiten. Die magnetische Induktion kann daraus bekanntlich nach der Formel $B = H + 4\pi J$ berechnet werden. Die parallele Komponente ist in schwachen Feldern in allen Richtungen so gut wie gleich, die normale zeigt überhaupt nur sehr kleine Werte; der Kristall verhält sich in diesem Felde ($H = 31,5$) wie eine isotrope Substanz. In stärkeren Feldern zeigt die parallele Komponente zwei Minima in Richtung der beiden Hauptachsen und zwei Maxima dazwischen, in Richtung der beiden Diagonalen. Gleichzeitig bilden sich in der Kurve der Normalkomponente von $0-180^\circ$ ¹⁾ zwei vollständige Wellen aus. In den beiden Achsen sowohl als auch in den beiden Diagonalen hat die normale Komponente Nullpunkte, dazwischen zeigt sie abwechselnd positive und negative Werte. In noch stärkeren Feldern endlich werden die Unterschiede in der parallelen Komponente wieder kleiner, die Kurven werden immer flacher, und endlich erreicht die Magnetisierung in allen Richtungen den Sättigungswert $J_{\max.} = 482$. Von dem Verhalten der Normalkomponente in starken Feldern wird etwas später die Rede sein.

1) Alle Kurven sind nur von $0-180^\circ$ gezeichnet, da das Stück von $180-360^\circ$ mit dem ersten stets vollständig kongruent ist.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt eine andere, aus demselben Kristall geschnittene Würfelfplatte, deren Kurven im

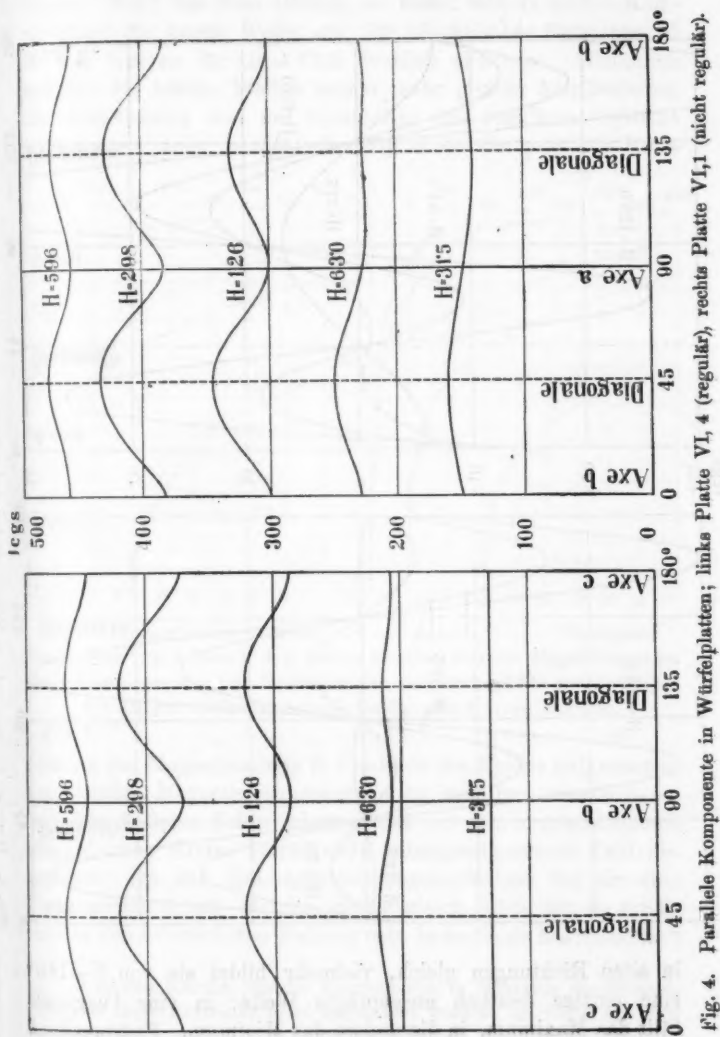


Fig. 4. Parallele Komponente in Würfelfplatten; links Platte VI, 4 (regulär), rechts Platte VI, 1 (nicht regulär).

rechten Teil der Figg. 4 und 5 zu sehen sind. Im schwächsten Felde, $H = 31,5$, ist die parallele Komponente durchaus nicht

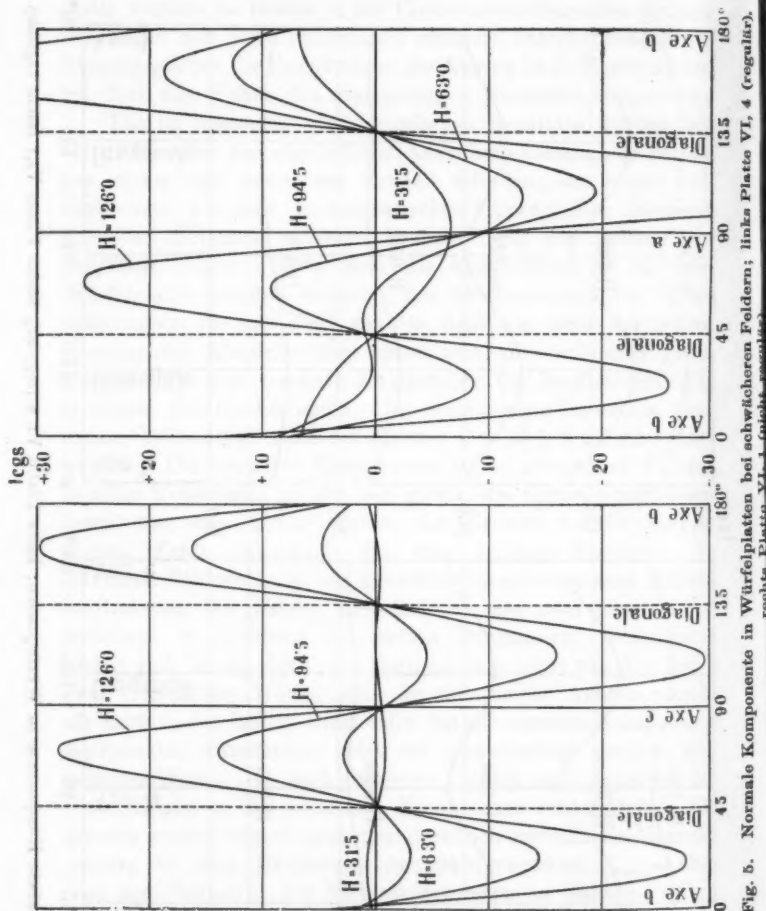


Fig. 5. Normale Komponente in Würfelplatten bei schwächeren Feldern; links Platte VI, 4 (regulär), rechts Platte VI, 4 (leicht unregelmäßig).

in allen Richtungen gleich, vielmehr bildet sie von $0-180^\circ$ eine einzige deutlich ausgeprägte Welle; in eine Diagonale fällt das Maximum, in die andere das Minimum. Entsprechend

weist auch die normale Komponente eine Welle von bedeutender Amplitude auf, deren Nullpunkte in den beiden Diagonalen liegen. Wird das Feld stärker, so bildet sich in beiden Komponenten die zweite Welle aus; ihr allmähliches Entstehen ist in den Kurven für $H = 63,0$ deutlich sichtbar. Allmählich nehmen die beiden Wellen immer mehr gleiche Amplitude an, die Abweichung von der Symmetrie des regulären Systems tritt immer mehr zurück. In Fig. 6 ist die parallele Kom-

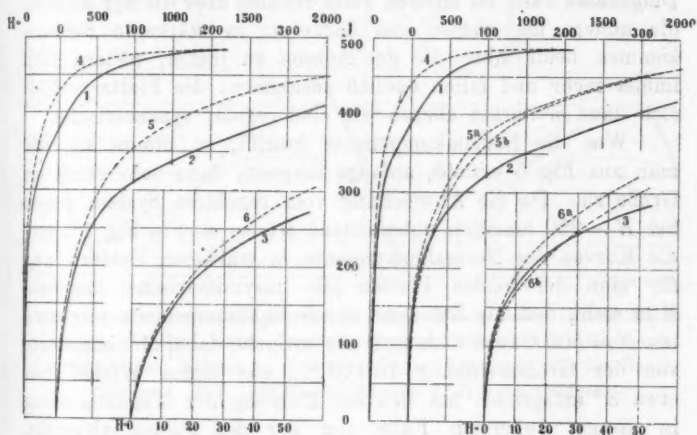


Fig. 6. Magnetisierungskurven. — Achsen, ---- Diagonalen. Die Kurven 1, 3, 5 bzw. 2, 4, 6 stellen jeweils dieselbe Magnetisierungskurve in drei verschiedenen Maßstäben dar, entsprechend den drei Teilungen für H ; der Ordinatenmaßstab ist für alle Kurven derselbe.

ponente der Magnetisierung in Funktion des Feldes aufgetragen; um richtige Magnetisierungskurven zu erhalten, wurde dabei von dem äußeren Felde jedesmal das von dem ungeschlossenen magnetischen Kreise herrührende entmagnetisierende Feld abgezogen. Da der Entmagnetisierungskoeffizient für die eine Platte gleich 0,160, für die andere gleich 0,164 ist, so erhält man in den schwächeren Feldern sehr bedeutende Korrekturen.¹⁾

1) In den Kurven, die die Komponenten in Funktion des Winkels geben, ist diese Korrektur nicht angebracht worden; sie hätte natürlich für jeden einzelnen Punkt anderen Wert erhalten, wodurch es unmöglich

Bei der links dargestellten symmetrischen Platte sieht man, wie die Kurven für Achsen und Diagonalen anfangs zusammenfallen; dann erhebt sich die Kurve der Diagonale über die der Achse, und in ganz starken Feldern kommen beide wieder zusammen; bei $H = 1500$ Gauss scheint die Sättigung vollkommen erreicht zu sein. Bei der rechts dargestellten, vom regulären System abweichenden Platte haben beide Achsen die gleiche Magnetisierungskurve; von den Kurven der beiden Diagonalen fällt im unteren Teile die eine über die der Achsen, die andere um ebenso viel darunter; in stärkeren Feldern kommen beide über die der Achsen zu liegen, nähern sich immer mehr und fallen endlich zusammen; die Platte verhält sich dann weiterhin ebenso wie eine regulär symmetrische.

Was die Normalkomponente betrifft, so nimmt sie, wie man aus Fig. 5 ersieht, anfangs langsam, dann sehr rasch an Größe zu. Da die Abweichung vom regulären System schon bei $H = 200$ ziemlich unbedeutend ist, so sind in Fig. 7 (oben) die Kurven der Normalkomponente in stärkeren Feldern nur für eine der beiden Platten (die unsymmetrische) gegeben. Man sieht, daß die Zunahme der Normalkomponente nur etwa bis $H = 500$ Gauss andauert; sie erreicht dabei Maximalwerte von der Größenordnung 70 C.G.S., was einem Winkel von etwa 8° entspricht, um den die Richtung der Magnetisierung in diesem äußersten Falle von der des Feldes abweicht. Weiterhin nimmt die Normalkomponente wieder ab, die Substanz nähert sich der Isotropie, die bei der Sättigung erreicht wird. In welcher Weise die Abnahme erfolgt, ist aus dem unteren Teile der Fig. 7 ersichtlich; dort sind direkt die Drehmomente $D = H \cdot J_n$ dargestellt, die im Magnetfeld auf 1 cm^3 der Substanz ausgeübt werden. Wie man sieht, nähern sich die Kurven der Drehmomente asymptotisch einer Grenzkurve, die Normalkomponente selbst nimmt daher umgekehrt proportional mit dem Felde ab.

Die anderen Platten aus demselben Kristall sowie die aus anderen homogenen Kristallen ergaben alle wesentlich gleiche Resultate wie die beiden besprochenen.

geworden wäre, zusammenhängende Kurven zu erhalten; die Form der Kurven, auf die es einzig ankommt, wird dadurch nur in sehr geringem Maße geändert.

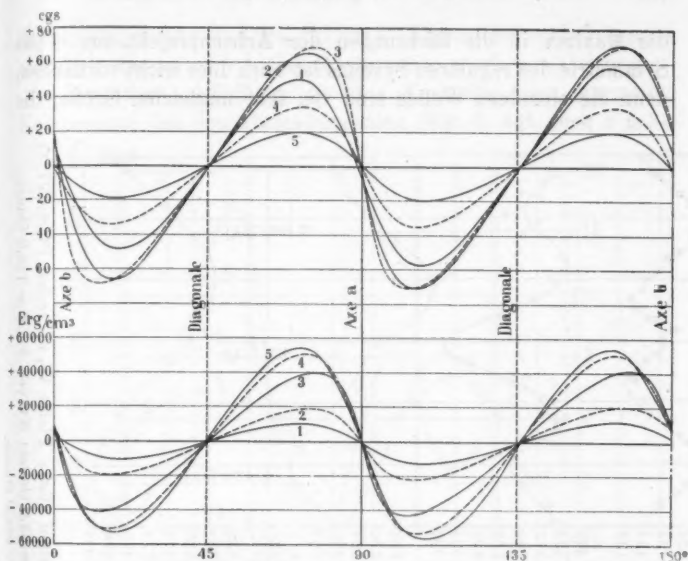


Fig. 7. Oben Normalkomponente in einer Würfelplatte (Platte VI, 1) in starken Feldern; unten Drehmoment pro Volumeinheit. Kurven 1: $H = 208,6$ Gauss; Kurven 2: $H = 298,0$ Gauss; Kurven 3: $H = 596$ Gauss; Kurven 4: $H = 1490$ Gauss; Kurven 5: $H = 2805$ Gauss.

Wir gehen nunmehr zu den Oktaederplatten über. Für diese ist charakteristisch, daß in ihnen die Anisotropie viel geringer ist als in den Würfelplatten; die parallele Komponente weicht in den einzelnen Richtungen nur wenig ab, die normale erreicht überhaupt nur kleine Werte, den vierten Teil wie bei den Würfelplatten. Die Fig. 8 zeigt Kurven der parallelen Komponente, die an zwei parallel zu derselben Oktaederfläche aus dem Kristall geschnittenen Platten erhalten wurden. In schwachen Feldern ist keine Gesetzmäßigkeit erkennbar. Bei $H = 126,0$ Gauss dagegen erkennt man deutlich drei Wellen; ihre Maxima fallen in die Richtungen der Dreiecksseiten, die Minima in die Richtungen der auf die Oktaederfläche projizierten kristallographischen Hauptachsen. Bei $H = 298,0$ Gauss sind wieder drei Wellen vorhanden, aber in genau umgekehrter Lage: es fallen nunmehr die Minima in die Dreiecksseiten und

die Maxima in die Richtungen der Achsenprojektionen. Die Symmetrie des regulären Systems ist auch hier nicht vorhanden, denn die einzelnen Wellen sind von sehr ungleicher Größe; die

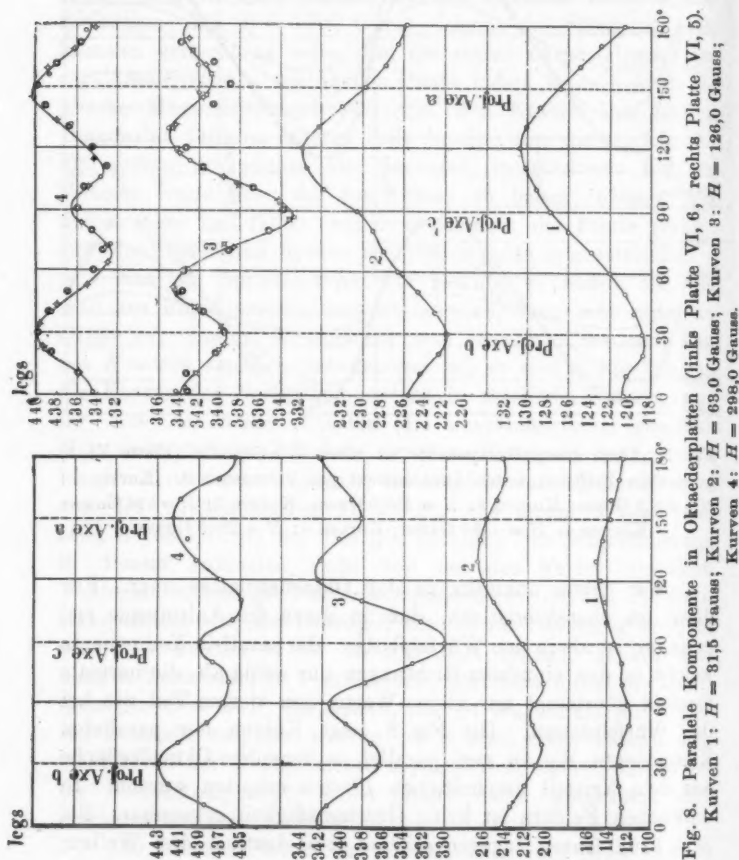


Fig. 8. Parallele Komponente in Oktaederplatten (links Platte VI, 6, rechts Platte VI, 5). Kurven 1: $H = 81.5$ Gauss; Kurven 2: $H = 68.0$ Gauss; Kurven 3: $H = 126.0$ Gauss; Kurven 4: $H = 298.0$ Gauss.

Abweichung besteht sogar im Gegensatz zu den Würfelplatten auch noch in starken Feldern. Der Grund dafür liegt jedenfalls nur darin, daß bei den Oktaederplatten die Differenzen zwischen den einzelnen Werten der Parallelkomponente über-

haupt sehr gering sind (ca. 3 Proz.). Diesen gegenüber kommt natürlich die an sich kleine Asymmetrie stark zur Geltung.

Besonders auffallend ist das Verhalten der normalen Komponente bei den Oktaederplatten (Fig. 9, vgl. auch Fig. 3).

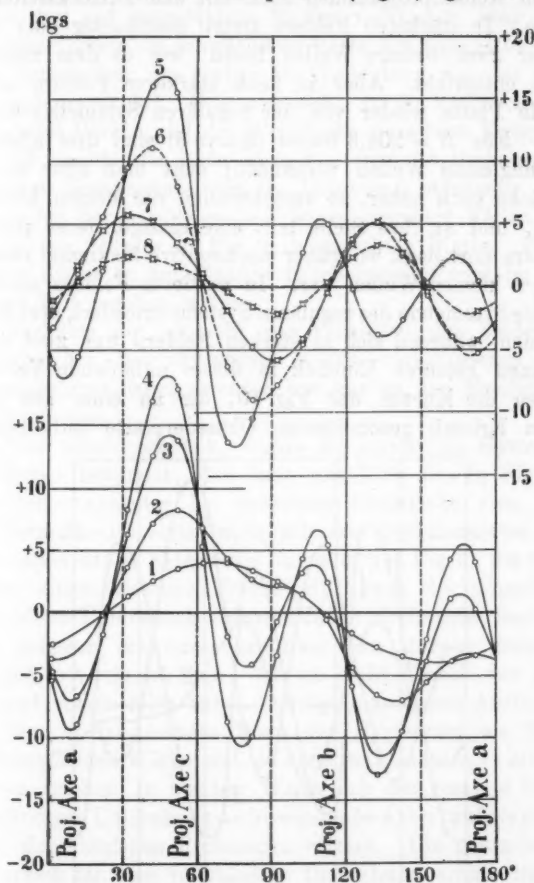


Fig. 9. Normale Komponente in einer Oktaederplatte (Platte VI, 5).

Kurve 1: $H = 31,5$ Gauss; Kurve 2: $H = 63,0$ Gauss; Kurve 3: $H = 94,5$ Gauss; Kurve 4: $H = 126,0$ Gauss; Kurve 5: $H = 208,6$ Gauss; Kurve 6: $H = 298,0$ Gauss; Kurve 7: $H = 596$ Gauss; Kurve 8: $H = 1490$ Gauss.

In schwachen Feldern erhält man stets eine einfache sinusähnliche Kurve (Kurve 1 in Fig. 9), deren Lage in den einzelnen Platten ganz verschieden ist; die Nullstellen fallen weder mit den Achsenprojektionen noch mit den Dreiecksseiten zusammen. In stärkeren Feldern treten gleichzeitig oder nacheinander zwei weitere Wellen hinzu, wie es dem regulären System entspricht. Aber in noch stärkeren Feldern scheint sich die Platte wieder von der regulären Symmetrie zu entfernen. Für $H = 208,6$ Gauss (Kurve 5) sind drei allerdings recht ungleiche Wellen vorhanden; geht man aber mit der Feldstärke noch höher, so verschwinden die beiden kleineren Wellen, und an ihre Stelle tritt eine einzige, deren positives Maximum dort liegt, wo früher das negative Maximum zwischen den zwei kleinen Wellen war. In mittleren Feldern sind also, wie es die Symmetrie des regulären Systems erfordert, drei Wellen vorhanden, während sich in starken Feldern nur zwei finden.

Einen besseren Einblick in dieses auffallende Verhalten gestatten die Kurven der Fig. 10, die an einer aus einem anderen Kristall geschnittenen Oktaederplatte aufgenommen

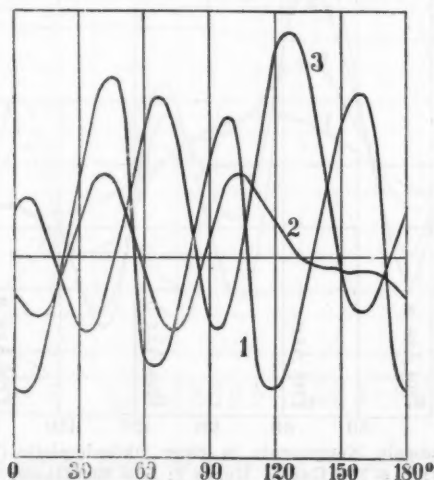


Fig. 10. Normale Komponente in einer Oktaederplatte in starken Feldern. Kurve 1: $H = 167,2$ Gauss; Kurve 2: $H = 368,1$ Gauss; Kurve 3: $H = 757$ Gauss.

wurden. Im Felde $H = 167,2$ erkennt man auch hier drei fast ganz gleich große Wellen. Bei $H = 368,1$ sind nur mehr zwei vorhanden, beide stark reduziert und verschoben; die dritte erscheint kaum angedeutet. Bei $H = 757$ sind aber wieder drei gut ausgebildete Wellen vorhanden, aber sie sind gegenüber denen im schwächeren Felde um eine halbe Wellenlänge verschoben; wo vorher ein Wellenberg war, ist jetzt ein Tal, und umgekehrt. Wie man sieht, ist die Erscheinung ganz analog der Umkehrung der Wellen der parallelen Komponente, von der vorhin die Rede war; nur tritt die Umkehrung der normalen Komponente erst in bedeutend stärkeren Feldern ein als bei der parallelen und ist in manchen Fällen unvollständig wie bei der in Fig. 9 dargestellten Platte. Eine Erklärung dieser so auffallenden Erscheinungen wird im theoretischen Teil gegeben werden.

Nachdem wir nunmehr das Verhalten der beiden Komponenten der Magnetisierung in den verschiedenen Platten kennen gelernt haben, wenden wir uns zu den Erscheinungen der Hysteresis.

Wie schon erwähnt, wurde die rotierende Hysteresis in der Weise bestimmt, daß man mit Hilfe des in Fig. 2 dargestellten Apparates bei derselben Feldstärke zwei Kurven der Normalkomponente (eigentlich des Drehmomentes = Normalkomponente \times Feldstärke) aufnahm (vgl. Fig. 3); die zwischen beiden eingeschlossene Fläche gibt dann die doppelte, bei jeder vollen Umdrehung aufzuwendende Hysteresisarbeit. Wenn man indessen ein derartiges Paar von Kurven genauer betrachtet, so erkennt man, daß sie nicht überall den gleichen Abstand voneinander haben. Trägt man diesen Abstand (bzw. den ihm entsprechenden Wert der Hysteresis) als Funktion der betreffenden Winkel auf, so kann man aus den so erhaltenen Kurven ersehen, in welcher Weise sich die gesamte bei einer vollständigen Umdrehung aufzuwendende Arbeit auf die einzelnen dabei durchlaufenen Richtungen verteilt. Die gesamte Hysteresisarbeit für eine vollständige Umdrehung erhält man dann als Mittel der Werte in den einzelnen Richtungen.

Fig. 11 zeigt die an einer Würfelplatte erhaltenen Kurven. In schwachen Feldern ist die Hysteresis in allen Richtungen annähernd gleich; weiterhin erkennt man zwei flache, aber doch

deutlich sichtbare Wellen; die Maxima fallen in die Richtungen der Diagonalen, die Minima in die der Achsen; noch später findet dann eine vollständige Umkehrung statt: man sieht

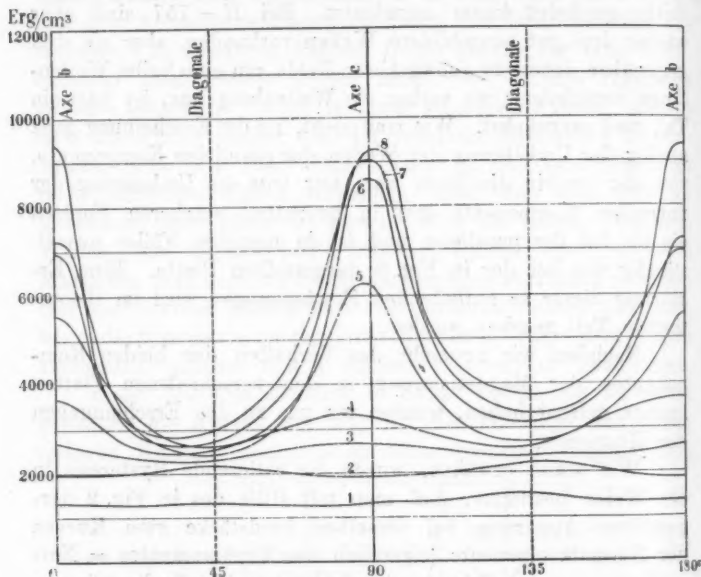


Fig. 11. Hysteresis in einer Würfelplatte (Platte VI, 1). Kurve 1: $H = 31,5$ Gauss; Kurve 2: $H = 63,0$ Gauss; Kurve 3: $H = 94,5$ Gauss; Kurve 4: $H = 126,0$ Gauss; Kurve 5: $H = 208,6$ Gauss; Kurve 6: $H = 298,0$ Gauss; Kurve 7: $H = 596$ Gauss; Kurve 8: $H = 1490$ Gauss.

nunmehr zwei sehr scharfe Maxima, die in die Achsenrichtungen fallen. In ganz starken Feldern werden die Wellen wieder flacher; die Messungen sind aber dort so ungenau, daß man keine brauchbare Kurve daraus machen kann.

Das Verhalten der Oktaederplatten ist ziemlich ähnlich. In schwachen Feldern ist auch hier kein Unterschied in den einzelnen Richtungen bemerkbar (Fig. 12); bei $H = 63,0$ Gauss sieht man drei sehr flache Wellen, deren Maxima in die Richtungen der Seiten des Oktaederdreiecks fallen.¹⁾ Dann

1) Bei der Platte VI, 5 ist das nicht gut sichtbar, weil die starke Abweichung dieser Platte von der regulären Symmetrie die Erscheinung

findet eine Umkehrung statt, es bilden sich drei scharfe Maxima in den Richtungen der auf die Oktaederplatte projizierten Hauptachsen. In ganz starken Feldern endlich erkennt man eine zweite Umkehrung, die Maxima fallen wieder

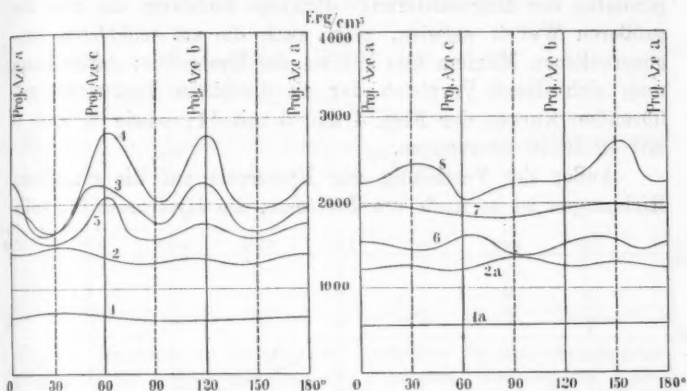


Fig. 12. Hysteresis in Oktaederplatten (die Kurven 1a und 2a beziehen sich auf Platte VI, 6, die anderen auf Platte VI, 5). Kurven 1 und 1a:

$H = 31,5$ Gauss; Kurven 2 und 2a: $H = 63,0$ Gauss; Kurve 3:

$H = 94,5$ Gauss; Kurve 4: $H = 126,0$ Gauss; Kurve 5: $H = 208,6$ Gauss;

Kurve 6: $H = 298,0$ Gauss; Kurve 7: $H = 596$ Gauss; Kurve 8:

$H = 1490$ Gauss.

in die Dreiecksseiten. Diese zweite Umkehrung entspricht offenbar der früher besprochenen analogen Erscheinung bei den beiden Komponenten der Magnetisierung, sie tritt aber bei noch bedeutend stärkeren Feldern ein als bei diesen.

Vergleicht man im allgemeinen die Hysteresiskurven mit denen der parallelen Komponente (die ja fast genau gleich der Magnetisierung selbst ist), so sieht man eine sehr einfache Beziehung: die Maxima der Hysteresis fallen dorthin, wo die Minima der Magnetisierung liegen, und umgekehrt; einer Umkehr der Wellen der Magnetisierung folgt, jedoch erst bei

verdeckt; es sind deshalb in Fig. 12 die entsprechenden Kurven an der zweiten, zu der ersten parallelen Oktaederplatte VI, 6 für schwache Felder eingezeichnet.

weiterer Verstärkung des Feldes, eine Umkehr der Hysteresis-kurven.

Abweichungen von der regulären Symmetrie finden sich bei der Hysteresis in genau gleicher Weise wie bei den Komponenten der Magnetisierung; diejenige Richtung, die dort die größeren Wellen aufwies, zeigt auch die am schärfsten ausgesprochenen Maxima und Minima der Hysteresis; davon kann man sich durch Vergleich der zu derselben Feldstärke gehörenden Kurven der Figg. 4 und 5 mit 11, sowie 8 und 9 mit 12 leicht überzeugen.

Außer der Verteilung der Hysteresis auf die einzelnen Richtungen ist es noch von Interesse, die Hysteresis für voll-

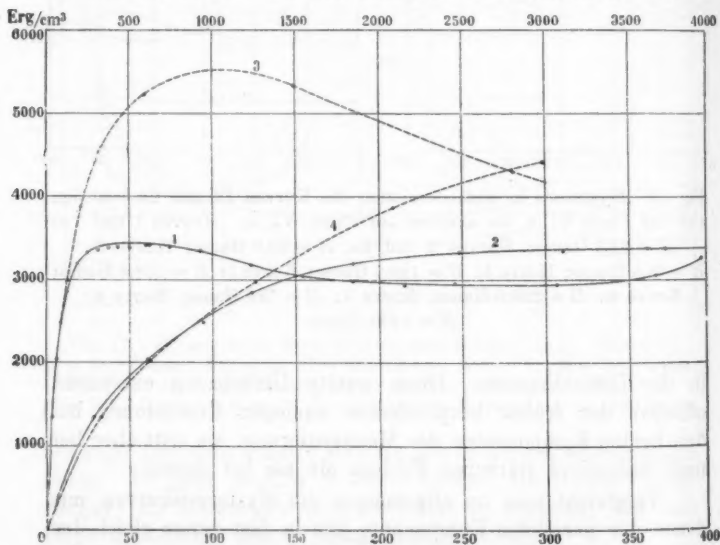


Fig. 13. Hysteresis in Funktion der Feldstärke für eine Würfelplatte (Platte VI, 1). — schnelle Drehung, ---- langsame Drehung des Feldes. Die obere Teilung für H gilt für die Kurven 1 und 3, die untere für die Kurven 2 und 4.

ständige Ummagnetisierung, also den Mittelwert aus den einzelnen Richtungen als Funktion des Feldes zu kennen. Diese Funktion ist für die Würfelplatte VI, 1 in Fig. 13, für die

Okttaederplatte VI, 5 in Fig. 14 durch die gestrichelten Kurven dargestellt. Jeder Punkt ist dabei, wie erwähnt, der Mittelwert aus 72 Ablesungen in den einzelnen Richtungen; eine vollständige Ummagnetisierung nahm daher etwa eine Stunde

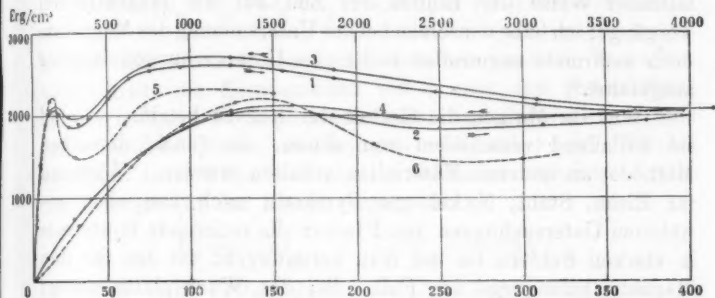


Fig. 14. Hysteresis in Funktion der Feldstärke für eine Okttaederplatte (Platte VI, 5). — schnelle, ---- langsame Drehung des Feldes. Kurven 1 und 2 bei zunehmender, Kurven 3 und 4 bei abnehmender Feldstärke. Die obere Teilung für H gilt für die Kurven 1, 3, 5, die untere für die Kurven 2, 4, 6.

in Anspruch. Ich habe nun außerdem auch die Hysteresis bei rascher Ummagnetisierung gemessen; dazu diente ein Apparat, im Prinzip gleich mit dem in Fig. 2 dargestellten, dessen Magnetfeld durch einen Motor in schnelle Drehung versetzt wurde (5—10 Umdrehungen pro Sekunde). Bei Drehung nach rechts und links entsteht an dem stark gedämpften System Platte-Spiegel ein ruhiger Ausschlag in der jeweiligen Drehrichtung, aus dem in leicht ersichtlicher Weise die Hysteresisarbeit für eine volle Drehung berechnet werden kann.¹⁾ Die so erhaltenen Kurven für schnelle Ummagnetisierung sind voll ausgezogen in den Figg. 13 und 14 zu sehen. Man erkennt sofort, daß zwischen ihnen und denen

1) Die beschriebene Methode wurde zuerst von Planer angewandt, vgl. V. Planer, Untersuchungen über rotierende und alternative Hysteresis an Eisen, Stahl, Nickel und Elektrolyteisen, Dissert. Zürich 1908; der für meine Versuche benutzte Apparat war von Hrn. A. Perrier zusammengestellt, dem ich für die freundliche Überlassung desselben auch an dieser Stelle bestens danke.

für langsame Ummagnetisierung ein starker Unterschied besteht; im allgemeinen verlaufen die Kurven für rasche Drehung flacher, es macht den Eindruck, als ob sie bei der großen Geschwindigkeit nicht imstande wären, allen Schwankungen der anderen zu folgen. Es zeigt sich hier in besonders auffallender Weise der Einfluß der Zeit auf die magnetischen Vorgänge; ich habe denselben bei der Untersuchung des Magnetits noch mehrmals angetroffen und einige Untersuchungen darüber ausgeführt.¹⁾

Was im übrigen die Gestalt der Kurven betrifft, so sind sie auffallend verschieden von denen, die (nach derselben Methode) an anderen Materialien erhalten wurden. Während für Eisen, Stahl, Nickel und Pyrrhotin nach den oben erwähnten Untersuchungen von Planer die rotierende Hysteresis in starken Feldern bis auf Null heruntergeht, ist das für den Magnetit keineswegs der Fall. Bei der Würfelplatte nimmt die Hysteresis nach einem Maximum etwas ab, nähert sich aber keineswegs der Null in Feldern, wo diese bei anderen Stoffen längst erreicht ist, ja in ganz starken Feldern scheint sie sogar wieder etwas zuzunehmen. Bei der Oktaederplatte sind sogar zwei sehr deutliche Maxima vorhanden; es ist anzunehmen, daß die Zahl der Maxima mit der Zahl der früher erwähnten Umkehrungen im Zusammenhang steht; eine Erklärung dafür ist indes bis jetzt nicht gelungen.

Theoretischer Teil.

1. Das Magnetisierungspotential.

Die so verworren aussehenden Erscheinungen des Kristallmagnetismus werden in mancher Hinsicht bedeutend leichter verständlich, wenn man den Begriff der Magnetisierungsarbeit zu Hilfe nimmt.²⁾

Wenn wir von der Hysteresis absehen (und wir können das tun, da ja alle unsere Kurven in der früher angegebenen Weise vom Einfluß derselben befreit wurden), so wird die

1) Vgl. meine ausführliche Arbeit in Archives des Sciences phys. et nat. 1908, sowie Dissert. Zürich 1908.

2) P. Weiss, Le travail d'aimantation des cristaux, Journ. de Phys. (4) 3. p. 194. 1904.

Magnetisierung zu einer eindeutigen Vektorfunktion der Feldstärke, sie besitzt ein Potential. Wir können dasselbe gleichsetzen mit der Arbeit, die zur Magnetisierung erforderlich ist und die bekanntlich durch die Formel

$$V = \int J_x dH_x + J_y dH_y + J_z dH_z = \int JH \cos(J, H)$$

ausgedrückt werden kann. Da wir bei unseren Versuchen nicht direkt die Komponenten von J nach drei festen Richtungen messen, so empfiehlt es sich, den Ausdruck auf eine etwas andere Form zu bringen. Es sei γ der Winkel zwischen H und der x -Achse, φ derjenige zwischen J und der x -Achse (in der Plattenebene), also

$$H_x = H \cos \gamma, \quad H_y = H \sin \gamma,$$

$$J_x = J \cos \varphi, \quad J_y = J \sin \varphi.$$

Durch Einführung dieser Werte und eine kleine Umformung erhält man:

$$dV = JH \sin(\varphi - \gamma) d\gamma + J \cos(\varphi - \gamma) dH$$

oder integriert:

$$V = \int J_p dH + \int H J_n d\gamma = \int J_p dH + \int D d\gamma,$$

wo $D = H J_n$ wieder das auf die im Apparat nach Fig. 2 auf die Platte ausgeübte Drehmoment bedeutet. Aus der Bedingung, daß dV ein vollständiges Differential sein muß, folgt dann weiter:

$$\frac{dJ_p}{d\gamma} = \frac{dD}{dH},$$

in Worten: Die partielle Ableitung der parallelen Komponente nach dem Winkel ist gleich der partiellen Ableitung des Drehmomentes nach dem Felde.

Aus dieser Gleichung folgen einige interessante Beziehungen.

Besitzt die parallele Komponente in einer Richtung ein Maximum oder Minimum, so ist dort $dJ_p/d\gamma = 0$ und daher auch $dD/dH = 0$, die Kurven des Drehmomentes schneiden

sich in dem dieser Richtung entsprechenden Punkte. Ist das Maximum oder Minimum für alle Feldstärken vorhanden, so ist auch das Drehmoment selbst und damit die Normalkomponente in dieser Richtung in allen Feldern gleich Null. Solche Richtungen sind in den Würfelplatten die Diagonalen, in den regulär symmetrischen auch die Achsen.

In der Umgebung eines derartigen Maximums ist $dJ_p/d\gamma < 0$, wenn der Winkel vom Maximum aus gerechnet wird. Es ist also auch $dD/dH < 0$, und da das für alle Werte von H zutrifft, ist auch D selbst negativ, das Moment wirkt der Verdrehung aus der Richtung des Maximums entgegen, diese Richtung stellt daher eine stabile Gleichgewichtslage dar; umgekehrt entspricht einem Minimum eine labile Gleichgewichtslage; alles das gilt aber nur dann, wenn das Maximum bzw. Minimum bei allen Feldern vorhanden ist; im anderen Falle stellt die betreffende Richtung überhaupt keine Gleichgewichtslage dar.

In der Nähe der Sättigung ist mit großer Annäherung $dJ_p/d\gamma = 0$, somit auch $dD/dH = 0$. Das Drehmoment nähert sich also in starken Feldern einem Grenzwert, der im allgemeinen von Null verschieden, aber endlich ist. Die Normalkomponente selbst ist daher dem Felde umgekehrt proportional, Fig. 7 zeigt die volle Übereinstimmung von Experiment und Theorie in dieser Hinsicht.

Wenn wir die Substanz mit einem Felde von unveränderlicher Richtung magnetisieren, so erhalten wir für die dazu nötige Arbeit:

$$V = \int J_p dH.$$

In Fig. 15 stellt die horizontal schraffierte Fläche OAB_1 diese Arbeit dar; $OB_1C_1D_1E_1$ ist dabei die zu der betreffenden Richtung γ_1 gehörende Magnetisierungskurve. Nehmen wir nun eine andere Richtung γ_2 , für die $OB_2C_2D_2E_2$ die Magnetisierungskurve ist. Gehen wir bis zu derselben Feldstärke, so stellt OAB_2 das dieser Richtung zugehörige Magnetisierungspotential V_2 dar; das der Richtung γ_1 entsprechende sei mit V_1 bezeichnet. Die vertikal schraffierte Fläche OB_1B_2 stellt also die Differenz $V_2 - V_1$ dar. Wir hätten aber auch in den

durch B_2 dargestellten Zustand gelangen können, wenn wir zuerst in der Richtung γ_1 bis nach B_1 magnetisiert hätten, und dann durch Verdrehung des Feldes in die Richtung γ_2 übergegangen wären. Die zu dieser Verdrehung erforderliche Arbeit wäre dann:

$$V_2 - V_1 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} D d\gamma.$$

Man kann dieses Integral direkt aus der Kurve des Drehmomentes (oder auch der normalen Komponente) entnehmen.

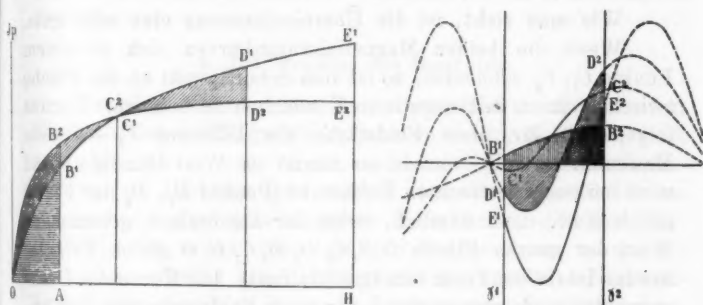


Fig. 15. Beziehungen zwischen den beiden Komponenten der Magnetisierung. Links parallele Komponente in Funktion des Feldes (Magnetisierungskurven), rechts Drehmoment pro Volumeinheit in Funktion der Feldrichtung.

In der rechtsseitigen Hälfte der Fig. 15 ist die entsprechende Fläche gleichfalls mit vertikalen Schraffen bezeichnet; ist der Maßstab richtig gewählt, so müssen die beiden vertikal schraffierten Flächen im rechten und linken Teil der Figur einander gleich sein.

Zur Kontrolle dieser Beziehung wurden an den Kurven der Würfelplatte VI, 1 (Figg. 4, 5 rechts, sowie 6, 7) eine Anzahl von Flächenmessungen mittels Planimeter ausgeführt und daraus die Werte des Magnetisierungspotentials für die beiden Achsen und Diagonalen berechnet. Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Werte des Potentials in Erg pro cm^3 Substanz:

Feld	Mittelwert des Potentials für die beiden		Differenz der Mittelwerte des Potentials der Achsen und Diagonalen berechnet aus	
	Achsen	Diagonalen	den Magneti- sierungskurven	den Kurven des Drehmomentes
208,6	52 100	57 500	5 400	5 430
298	87 300	96 900	9 600	9 420
596	212 000	232 400	20 400	20 200
1490	638 000	663 200	25 200	25 300
2805	1 300 000		—	28 100

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine sehr gute.

Wenn die beiden Magnetisierungskurven sich in einem Punkte C_1 , C_2 schneiden, so ist vom Schnittpunkt an die Fläche zwischen ihnen mit negativem Vorzeichen zu nehmen. Daraus folgt, daß für diese Feldstärke die Differenz $V_2 - V_1$ ein Maximum erreicht, von da an nimmt ihr Wert ständig ab und wird bei einer bestimmten Feldstärke (Punkte D_1 , D_2 der Figur) gleich Null, dann nämlich, wenn der algebraisch genommene Wert der ganzen Fläche $O B_2 C_2 D_2 D_1 C_1 B_1 O$ gleich Null geworden ist (in der Figur schräg schraffiert). Die Kurve des Drehmomentes muß, entsprechend für diese Feldstärke mit der Abszissenachse gleichfalls eine Fläche vom algebraischen Wert Null einschließen; im rechten Teil der Figur ist diese Fläche ebenfalls schraffiert. Geht man mit der Feldstärke noch höher, so wird die Fläche des Drehmomentes und damit auch die der Normalkomponente negativ (E_1 , E_2 in der Figur), d. h. die Welle der Normalkomponente erleidet eine Umkehrung. Man sieht, daß diese Umkehr der Wellen der Normalkomponente nicht zur selben Zeit stattfinden kann wie die der Parallelkomponente, die im Momente stattfindet, wo sich die Magnetisierungskurven schneiden, sondern erst in einem stärkeren Felde. Die Normalkomponente steht zur parallelen in einem Verhältnis wie ein Integral zu seinem Differentialquotienten, wie zurückgelegter Weg zur Geschwindigkeit, usw.

Auf Grund dieser Betrachtungen erscheint nun auch das vorher unerklärliche Verhalten der Oktaederplatten in starken Feldern ganz verständlich. Wir wissen, daß bei $H = \text{ca. } 200$ Gauss eine Umkehr der Wellen der parallelen Komponente stattfindet,

die nach der eben besprochenen Gesetzmäßigkeit eine Umkehrung der normalen Komponente bei etwa $H = 350\text{--}400$ Gauss zur Folge hat. Da nun aber infolge der Abweichungen von der Symmetrie des regulären Systems die Magnetisierungskurven nicht für alle drei Achsenprojektionen, bzw. Dreiecksseiten in gleicher Weise verlaufen, so findet die Umkehrung der einzelnen Wellen nicht bei derselben Feldstärke statt, und es kann der Fall eintreten (wie in Fig. 9), daß eine der Wellen sich selbst in den stärksten Feldern nicht umkehrt. Auf diese Weise erklärt sich in natürlicher Weise die auffallende Unregelmäßigkeit der Normalkomponente von Oktaederplatten in den starken Feldern.

2. Die Struktur des Magnetits.

Nachdem wir nunmehr die hauptsächlichsten magnetischen Eigenschaften des Magnetits besprochen haben, wollen wir jetzt versuchen, ob es möglich ist, sich auf Grund dieser Eigenschaften ein Bild von dem inneren Bau des Magnetitkristalles zu machen. Die naheliegendste Vorstellung, die auch Hr. P. Weiss in seiner grundlegenden Untersuchung schon annimmt, ist offenbar die, daß man sich den regulären Magnetitkristall aus einzelnen Elementen von magnetischer Substanz zusammengesetzt denkt, die, in einem kubischen Netz angeordnet, die Ecken einer Unzahl von kleinen Würfeln bilden; dieselbe Vorstellung wendet man bekanntlich auch sonst oft in der Kristallographie an. Die Elemente selbst müssen wir als isotrop ansehen, ohne indes irgend eine weitere Annahme betreffs ihrer magnetischen Eigenschaften zu machen; der Raum zwischen ihnen wird als nicht magnetisierbar angesehen.

Wir haben nun gesehen, daß die Mehrzahl der aus Magnetitkristallen hergestellten Platten bedeutende Abweichungen von der Symmetrie des regulären Systems aufweist. Wenn man sieht, was für Unregelmäßigkeiten in dieser Beziehung bei Platten, die in derselben Richtung aus dem gleichen Kristall geschnitten sind, vorkommen, so liegt die Vermutung recht nahe, daß diese Abweichungen überhaupt nicht vom inneren Bau des Kristalles, sondern nur von Ungenauigkeiten in der Gestalt der Platten herrühren. Diese Annahme kann indes aus mehreren Gründen nicht zutreffend sein. Zunächst müßte

man, um Abweichungen in dieser Größe zu erklären, so große Ungenauigkeiten annehmen, wie sie bei der sorgfältigen Herstellung und Ausmessung der Platten ganz ausgeschlossen sind. Dann zeigt sich bei allen untersuchten Würfelplatten, soweit sie überhaupt aus homogenen Kristallen stammen, stets dieselbe Art der Abweichung (Nullpunkte der Normalkomponente in den Diagonalrichtungen, Maxima und Minima in den Achsrichtungen in schwachen Feldern); würde die Sache nur von Ungenauigkeiten der Platten herkommen, so würden die Nullpunkte gewiß manchmal auch in andere Richtungen fallen. Dazu kommt, daß sich manchmal auch Paare von Platten finden, die in derselben Richtung aus einem Kristall geschnitten sind und die tatsächlich ganz gleichartige Unsymmetrie zeigen (man vergleiche die beiden Oktaederplatten in Fig. 8). Und endlich hat sich gezeigt, daß Platten, die durch einen Zufall stark beschädigt wurden, nach der Beschädigung fast genau gleiche Kurven ergaben wie vorher, woraus hervorgeht, daß bei so dünnen Platten der Einfluß von kleinen Ungenauigkeiten in der Form ziemlich unbedeutend ist.

Die Abweichung von der regulären Symmetrie liegt also unbedingt im Kristall selbst; aber diese Abweichung variiert innerhalb desselben Kristalles von Punkt zu Punkt, ganz ähnlich wie die von Weiss entdeckte Abweichung des Pyrrhotins von der Symmetrie des hexagonalen Kristallsystems.

Zur Erklärung dieser Abweichungen bieten sich drei Hypothesen: 1. wir ändern das kubische Netz oder Raumgitter in entsprechender Weise ab, 2. wir erklären die Abweichung durch innere Spalten in dem sonst regulären Kristall, und 3. wir denken uns den Kristall aus wechselnden Mengen von Elementarkristallen zusammengesetzt.

Die erste Annahme erweist sich sofort als undurchführbar. Ändert man das kubische Raumgitter, wie es naheliegt, in ein parallelepipedisches um, so erhält man ungleiche Magnetisierungskurven für die drei Achsen, gleiche dagegen für die beiden in einer Würfelfläche liegenden Diagonalen, während das Experiment gerade das Umgekehrte ergibt. Ändert man aber die Winkel, so daß die Quadrate zu Rhomben werden, so verschwindet überhaupt jede Symmetrie, der Kristall wird magnetisch triklin. Außerdem ist es auch kaum denkbar, daß

derartige Modifikationen im inneren Bau sich nicht auch in der äußeren Gestalt des Kristalles bemerkbar machen würden; etwas Derartiges ist aber bisher am Magnetit nie beobachtet worden.

Gegen die dritte Hypothese, den Aufbau aus Elementarkristallen, spricht neben anderen Gründen vor allem die Tatsache, daß die gewissen Abweichungen nur in schwachen Feldern in bedeutendem Maße zutage treten, während die dem regulären System entsprechende Anisotropie noch in viel stärkeren Feldern vorhanden ist. Um beides zu erklären, müßte man recht komplizierte Annahmen machen. Die einfachste wäre noch die, daß man sich den Kristall aus sechs Elementarkristallen zusammengesetzt denkt; jeder Elementarkristall müßte, wie der Elementarkristall des Pyrrhotins¹⁾, eine magnetische Ebene (d. h. eine Ebene relativ leichter Magnetisierbarkeit) besitzen, und zwar müßte diese Ebene mit einer Fläche des Würfels zusammenfallen; innerhalb dieser Ebene wäre dann, gleichfalls ganz wie beim Pyrrhotin, eine der beiden Diagonalen als Richtung leichtester, die andere als Richtung schwererer Magnetisierung anzunehmen. Zur Erklärung der regulären Symmetrie in stärkeren Feldern muß man annehmen, daß für jede der drei Würfelflächen als magnetische Ebene die gleiche Menge von Elementarkristallen vorhanden sei, daß sie sich jedoch innerhalb jeder Fläche in ungleicher Zahl auf die beiden Diagonalen als Richtungen leichtester Magnetisierung verteilen. Das ist jedenfalls eine recht gekünstelte und daher wenig wahrscheinliche Annahme. Die Hypothese der Zusammensetzung aus Elementarkristallen allein ist also auch nicht imstande, uns ein einfaches Bild von den magnetischen Eigenschaften des Magnetitkristalles zu liefern.

In sehr einfacher Weise gelangen wir dagegen zu diesem Ziel mit Hilfe der zweiten von den drei angeführten Hypothesen. Wir nehmen an, der Kristall an sich sei vollkommen regulär symmetrisch, er kann aus einem einfachen kubischen Raumgitter bestehend gedacht werden. Dieser Kristall sei nun von einer Unzahl von mikroskopischen (aber im Vergleich

1) Vgl. die mehrfach erwähnte Arbeit von Weiss über den Pyrrhotin.

zu den Elementen des kubischen Gitters doch sehr großen) Spalten, parallel den vier Flächen des Oktaeders durchgezogen. Durch diese Annahme würde zugleich auch die ausgezeichnete Spaltbarkeit nach den Flächen des Oktaeders erklärt, die viele der Kristalle auszeichnet. Die vier Spaltensysteme erzeugen natürlich entmagnetisierende Felder, die in einer Würfelplatte parallel den Diagonalen wirken. Sind die einzelnen Spaltensysteme gleich stark ausgebildet, so ergibt eine Würfelplatte ein Bild, wie es auf der linken Seite der Fig. 16 zu sehen ist.

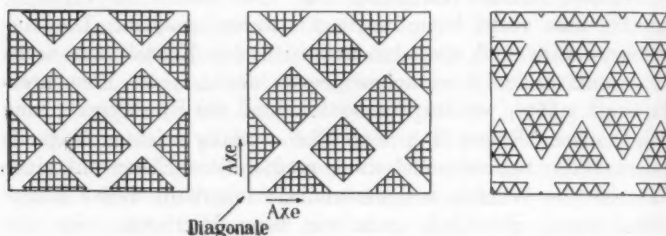


Fig. 16. Schema der wahrscheinlichen Struktur des Magnetitkristalles. Links Würfelplatte, regulär symmetrisch; in der Mitte Würfelplatte, nicht regulär symmetrisch; rechts Oktaederplatte, regulär symmetrisch.

Die Symmetrie des regulären Systems wird in diesem Falle durch die Spalten in keiner Weise gestört. Überwiegen jedoch die Spalten in der Richtung der einen Diagonale, wie im mittleren Teile der Figur, so ist das entmagnetisierende Feld in dieser Richtung stärker als in der anderen, und es muß eine Abweichung von der regulären Symmetrie in genau der Weise eintreten, wie sie bei den Experimenten beobachtet wurde. Die Achsen behalten auch in diesem Falle gleiche Magnetisierungskurven, wie das auch die Versuche ergeben haben.

Etwas anders liegt die Sache bei den Oktaederplatten; im rechten Teil der Fig. 16 ist eine solche mit gleich breiten Spalten dargestellt, die also der Symmetrie des regulären Systems entspricht. Man erkennt leicht den Unterschied zwischen dieser Platte und der Würfelplatte: dort konnte eine Abweichung von der regulären Symmetrie sich nur in einer

einigen Weise bemerkbar machen, indem der Kristall in Richtung der einen Diagonale leichter magnetisierbar erscheint als in Richtung der anderen; hier dagegen gibt es unendlich viele Arten von Unsymmetrie, je nachdem in welchen Verhältnissen die Spalten in den drei Richtungen zueinander stehen. Aus dieser Tatsache erklären sich in der natürlichsten Weise die großen Unterschiede, die sich zwischen verschiedenen Oktaederplatten, auch solchen aus demselben Kristall und parallel zu derselben Fläche, in vielen Fällen gezeigt haben.

(Eingegangen 3. August 1909.)

**7. Das Verhalten
des Eises im ultraroten Spektrum;
von Günther Bode.**

Über die ultraroten Eigenschaften des Eises ist fast nichts¹⁾ bekannt, während die des Wassers eingehend²⁾, besonders in neuerer Zeit³⁾, untersucht sind. Die Dielektrizitätskonstante des Wassers ist bekanntlich gleich 81, d. h. der Brechungsexponent für unendlich lange Wellen 9, die des Eises hingegen nach den sorgfältigen Untersuchungen von Behn und Kiebitz⁴⁾ 1,76 bis 1,88, in schöner Übereinstimmung mit dem aus dem Maxwell'schen Gesetz sich ergebenden theoretischen Wert von 1,74 bis 1,77, entsprechend $n_{\infty} = 1,32$ bis 1,33.

Hiernach schien es von Interesse, das Verhalten des Eises im ultraroten Spektrum näher zu studieren, speziell zu untersuchen, ob Eis schon im kurzwelligen Teile des ultraroten Spektrums sich anders verhalte als Wasser.

Die Untersuchungen an Eis sind mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft. Es scheint unmöglich, eine sehr dünne, genau definierte und vor allem vollkommen klare Eisplatte herzustellen. Irgendwelche Einschließungen, an denen Brechung und diffuse Reflexion stattfinden kann, sind stets vorhanden, zumal wenn man Eisschichten von genau bestimmbarer Dicke herstellen muß, die außerdem wegen der starken Absorption des Eises sehr dünn sein müssen. Weder durch Auskochen destillierten Wassers noch durch mehrfaches Umgefrieren im Vakuum gelang es, eine vollkommen klare Eisschicht zu erhalten.⁵⁾ Ein direkter quantitativer Vergleich der optischen

1) F. A. Saunders, Johns Hopkins Univ. Circ. 18. Nr. 140. 1899.

2) E. Aschkinass, Wied. Ann. 55. p. 401. 1895; F. Paschen, Wied. Ann. 51. p. 1; 52. p. 209. 1894.

3) H. Rubens u. E. Ladenburg, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 11. p. 18. 1909; Berliner Ber. 1908.

4) U. Behn u. F. Kiebitz, Boltzmann-Festschrift p. 616. 1904.

5) Vgl. G. Quincke, Ann. d. Phys. 18. p. 78. 1905.

Eigenschaften von H_2O in fester und flüssiger Form ist aus diesem Grunde nicht möglich, doch gibt auch ein qualitativer Vergleich die wesentlichen Aufschlüsse, besonders wenn es gelingt, an einigen Stellen wenigstens quantitative Werte zu erhalten.

Absorption des Eises bis $3\ \mu$.

Die Absorptionsmessungen wurden mit Hilfe des in Fig. 1 skizzierten Apparates ausgeführt.

Ein etwa 5 cm weites Metallrohr *a* (vgl. Fig. 1) führte durch einen Metallkasten *b*, der mit der abkühlenden Substanz gefüllt werden konnte, und nach außen durch mehrere Lagen Schafswolle isoliert war. In der Mitte des Rohres *a* war ein mit einem Deckel verschließbarer Aufsatz *c* angebracht, der

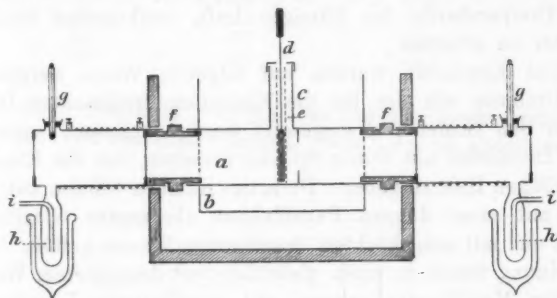


Fig. 1.

gestattete, die zu untersuchende Eisplatte in den Apparat zu bringen und je nach Wunsch in den Strahlengang ein- oder auszuschalten. Dies geschah mittels eines Schiebers *d*, der durch eine Führung *e* seinen Halt bekam und von außen ohne Entfernung des Deckels direkt oder auf elektromagnetischem Wege vom Beobachtungsplatze aus betätigt werden konnte. Durch den Deckel war ein Pentanthermometer oder Thermo-element eingeführt. An den beiden Enden des Rohres *a* waren zwei elektrisch heizbare Kammern angebracht, die durch je einen Holzring ¹⁾ mit dem Rohre *a* verbunden waren. Zwei

1) Die Holzringe sollen eine direkte Wärmeleitung von Metall zu Metall verhüten.

Thermometer (*gg*) gestatteten, die Temperatur in den Heizkammern, die durch dünne Glimmerblättchen verschlossen waren, zu kontrollieren. Da das Trocknen der Luft in den Kammern mit P_2O_5 nicht genügte, um die Glimmerfenster vor Wasserbeschlägen zu schützen, wurden zwei Ansatzröhren *hh* angekittet, die in flüssige Luft getaucht werden konnten. Hierdurch erniedrigte sich jedoch der Druck in den Heizkammern so sehr, daß die mit Wasserdampf stark gesättigte Luft aus dem Raum *a* durch feine Risse¹⁾ in der Kittung in die Heizkammern drang und sofort die Glimmerfenster mit einer Wasserhaut bedeckte. Deshalb wurden in die Kühlgefäße *hh* zwei Glasröhren *ii* eingeführt, die bis beinahe auf den Boden reichten und über Chlorcalcium mit der Außenluft in Verbindung waren. Hierdurch gelang es, selbst bei Anwendung von Temperaturen der flüssigen Luft, vollkommen trockene Fenster zu erhalten.

Die Eisplatten wurden auf folgende Weise hergestellt. Metallrahmen von der für die Eisplatten erwünschten Dicke, die in den Schieber *d* eingesetzt werden konnten, waren an ihrer Innenseite mit feinen Spitzen versehen, um der Eisplatte den nötigen Halt zu geben. Derartige Rahmen wurden zwischen zwei mit einer dünnen Paraffinhaut überzogene Glasplatten gelegt und mit ausgekochtem destilliertem Wasser gefüllt. Diese Anordnung wurde in einen gleichfalls mit destilliertem Wasser gefüllten Metallkasten gesetzt, mit paraffinierten Pappdeckelstücken festgeklemmt und zum Gefrieren gebracht. Es gelang nach einiger Übung leicht, die Eisplatte nach Abreißen der Pappstücke und der Glasplatten mit einer Pinzette in dem vorher gut gekühlten Schieber einzulegen, mit einem Wassertropfen festzukitten und Schieber mit Eisplatte in den Apparat einzuführen. Die dünnsten Eisplatten, die auf diese Weise erhalten wurden, waren 0,35 mm dick.

Der oben beschriebene Apparat wurde in den Strahlengang eines Nernstbrenners eingeschaltet, dessen Strahlung durch einen Hohlspiegel auf dem Spalt eines Spiegelspektrometers mit Flußspatprisma konzentriert war. Durch einen zweiten

1) Trotz der vorsichtigsten Einbettung der Glimmerhlättchen zwischen zwei Diaphragmen wurde das Kittmittel bei sehr tiefen Temperaturen doch so spröde, daß einzelne Risse entstanden.

Hohlspiegel wurde die aus dem Spektrometer austretende zerlegte Strahlung auf ein Boyssches Mikroradiometer, das nach den Angaben von H. Schmidt konstruiert war¹⁾, geworfen.

Eine Eisplatte von etwas über 1 mm Dicke absorbierte bei $1\ \mu$ bereits 93 Proz., und ihre Absorption stieg nach einigen geringen Schwankungen, die Tab. 1 zeigt, jenseits $2,5\ \mu$ auf 100 Proz.

Tabelle 1.

Absorption einer 1 mm dicken Eisplatte.²⁾

Wellenlänge	Ausschlag ohne Eisplatte	Absorption in Proz.
1	367 Skt.	93
1,5	1060 "	97,5
2,0	802 "	99
2,3	507 "	98
2,5	377 "	99,5

Mit einer Eisplatte von 0,35 bis 0,4 mm Dicke gelang es auch nicht viel weiter zu kommen. Von $2,9\ \mu$ an absorbierte

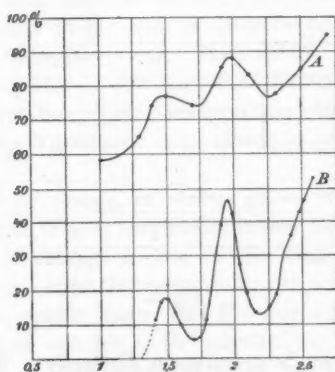


Fig. 2.

1) H. Schmidt, Diss. Berlin p. 35. 1909.

2) Die Werte sind, da sie ja (wie oben erwähnt) keine absoluten darstellen können (wegen der Inhomogenität des Eises und der ungleichen Dicke der Platte an verschiedenen Stellen), nicht korrigiert. Eine Korrektur wegen der Reflexion an den beiden Eisflächen würde nur wenige Prozente ausmachen.

sie vollkommen. Doch erkennt man an Kurve *A*, Fig. 2, deutlich den Gang der Absorption mit der Wellenlänge.

Es treten deutliche Maxima auf bei 1,5, 1,95 und 3 μ , Maxima, welche auch in der Absorptionskurve des Wassers vorhanden sind. In Fig. 2 ist zum Vergleich die Absorptionskurve einer 0,05 mm dicken Wasserschicht nach Aschkinass¹⁾ eingetragen (Kurve *B*).

Die Analogie der Absorption von Wasser und Eis trat noch deutlicher zutage an Kurven, die aus Messungen an dünneren Eisschichten hervorgegangen waren. Nachdem festgestellt war, daß jenseits 3 μ mit Eisplatten von $\frac{1}{10}$ mm Dicke keine Resultate zu erzielen waren, konnte man mit Hilfe aufeinander gepreßter Glasplatten, deren Abstand durch Stanniolringe festgelegt wurde, sehr dünne Eisschichten herstellen. Dies bot außerdem den Vorteil, gleichzeitig die Absorption von Wasser unter denselben Bedingungen aufnehmen zu können.

In Fig. 3 zeigt z. B. Kurve *b* die Absorption einer Wasserschicht von etwa 0,04 mm Dicke, Kurve *a* die Absorption

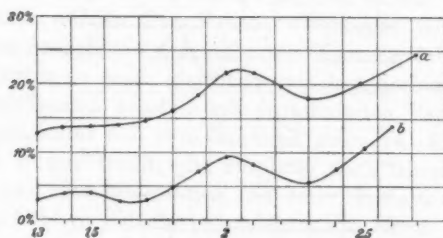


Fig. 3.

desselben Wassers in gefrorenem Zustande. Wie schon oben erwähnt, ergibt sich die Absorption des Eises infolge seiner Inhomogenität zu groß. Man darf also aus Fig. 3 nicht schließen, daß Eis stärker absorbiert als Wasser, doch ist dies, wie später (p. 334) gezeigt wird, sehr wahrscheinlich.

1) E. Aschkinass, l. c.

Reflexionsvermögen des Eises.

Jenseits 3μ versagen Absorptionsmessungen an dünnen Eisplatten. Um dennoch näheren Aufschluß über das ultrarote Verhalten des Eises zu erhalten, speziell um zu untersuchen, ob auch Eis bei $3,06\mu$ die für Wasser so charakteristische Stelle anomaler Absorption aufweist, wurde das Reflexionsvermögen bestimmt.

Die Messungen fanden mit derselben Anordnung statt, mit der Rubens und Ladenburg¹⁾ das Reflexionsvermögen des Wassers untersuchten. Die Strahlung einer Nernstlampe wird abwechselnd an einem Silberspiegel und an dem zu untersuchenden Material reflektiert und dann spektral untersucht. Liegen bei beiden Messungen genau die gleichen Verhältnisse vor, so erhält man aus dem Verhältnis der in beiden Fällen für dieselbe Wellenlänge beobachteten Ausschläge direkt das Reflexionsvermögen. Bei Versuchen mit Eis ist es nicht möglich, die geforderten Bedingungen streng einzuhalten. Man kann eine Eisfläche nicht absolut plan und gleichmäßig spiegelnd herstellen, auch ist es nicht möglich, den Eisspiegel genau an dieselbe Stelle und in dieselbe Ebene zu bringen, an der der Silberspiegel war. Man erhält aber den Gang des Reflexionsvermögens mit der Wellenlänge und kann das so ermittelte relative Reflexionsvermögen durch Anwendung eines besonderen Verfahrens angenähert in ein absolutes verwandeln.

Die Eisfläche wurde in einem gegen Wärmeleitung isolierten Blechgefäß (Fig. 4) hergestellt, indem destilliertes Wasser über einer Kühlschlange *a*, die in der Nähe der Oberfläche des Wassers lag, zum Gefrieren gebracht wurde. Die Kühlschlange diente später dazu, das Eis vor dem Schmelzen zu schützen und auf -5 bis -15° abzukühlen, so daß die mit der Zimmerluft in Berührung stehende Oberfläche stets trocken blieb. In der Mitte des Gefäßes war ein Thermoelement *b* aus Silber und Konstantan angebracht, dessen eine Lötstelle etwa $\frac{1}{2}$ —1 mm unter der Oberfläche des Eises lag. Gekühlt wurde mit -20 bis -30° temperiertem Alkohol. Diese Flüssig-

1) H. Rubens u. E. Ladenburg, Berl. Ber. 12. p. 277. 1908.

keit eignet sich sehr für Abkühlungszwecke. Man kann sie bequem bis auf Temperaturen von -80° abkühlen, ohne daß sie an Beweglichkeit erheblich verliert¹⁾, und ihre spezifische Wärme ist verhältnismäßig hoch (0,58, eine der höchsten nach Wasser).

Nachdem die Oberfläche des Eises mit einer handwarmen Metallplatte eben gemacht war, wurde sie sorgfältig poliert,

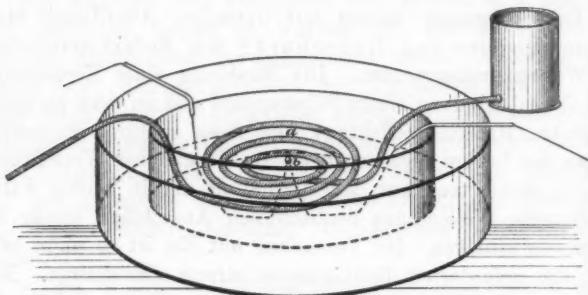


Fig. 4.

zuerst mit dem Ballen der Hand, dann mit einem Lederlappen, der auf einer ebenen Platte aufgespannt war, zuletzt mit Seide. Da sich nach einiger Zeit oft ein Beschlag der polierten Oberfläche des Eises bildete, der eine merkliche Verminderung des Reflexionsvermögens zur Folge hatte, wurde unmittelbar vor jeder einzelnen Reflexionsmessung die Oberfläche des Eises durch einmaliges Überstreichen mit einem seidenen Lappen von den Spuren des sich bildenden Beschlages gereinigt. Durch diese Vorsichtsmaßregel gelang es, recht gut übereinstimmende Ausschläge des Radiomikrometers zu erhalten. Die Ausschläge wurden dadurch kontrolliert, daß zwischen der fortlaufenden Messung auf frühere Werte zurückgegriffen wurde.

Tab. 2 zeigt die auf Silber bezogenen relativen Reflexionsvermögen in Prozenten. Der Inzidenzwinkel betrug etwa 15° .

1) Bei etwa -100° fängt Alkohol an dickflüssig zu werden, um bei $-130,5^{\circ}$ zu erstarren.

Tabelle 2.

Reflexionsvermögen des Eises.

λ	R relativ in %	R absolut in %
1,0	2,04	1,72
1,5	1,92	1,62
2,0	1,92	1,62
2,3	1,56	1,31
2,5	1,12	0,94
2,7	0,75	0,63
2,9	0,94	0,79
3,0	1,90	1,6
3,1	4,13	3,47
3,2	6,03	5,1
3,3	5,25	4,42
3,5	3,33	2,81
3,7	2,51	2,12
4,0	2,07	1,75

In Kolumne 3 sind die absoluten Reflexionsvermögen angegeben. Sie wurden aus den relativen durch Umrechnung mittels eines konstanten Reduktionsfaktors erhalten, indem der für 1μ gefundene Wert mit dem aus der Fresnelschen Formel berechneten verglichen wurde. Der für diese Formel notwendige Brechungsexponent von Eis für $\lambda = 1 \mu$ wurde aus den bekannten Brechungsexponenten des Wassers und des Eises extrapoliert zu $n = 1,3015$ unter der Annahme (die nach den Absorptionsmessungen auch gerechtfertigt erscheint), daß die Dispersion des Wassers und des Eises in dem Gebiete kürzerer Wellen einigermaßen proportional verläuft.

In Fig. 5, Kurve 1, ist das Reflexionsvermögen als Funktion der Wellenlänge eingezeichnet. Kurve 2 zeigt die entsprechende Kurve des Wassers nach den Messungen von Rubens und Ladenburg. Wie man sieht, geben die Kurven das gleiche Bild. Maximum und Minimum liegen an derselben Stelle, nur sind sie bei Eis noch bedeutend ausgeprägter. Das Reflexionsmaximum bei $3,2 \mu$ ist bei Eis noch erheblich größer als bei Wasser, also besitzt auch Eis in dieser Gegend

(3,06 μ) eine starke anomale Absorption, sogar eine stärkere als das Wasser.

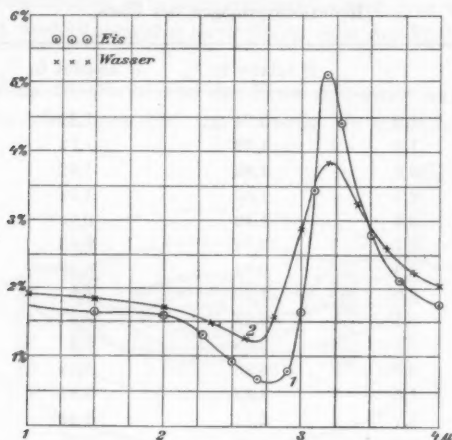


Fig. 5.

Absorptionsmessungen an gefrorenen Seifenlamellen.

Jenseits 3,06 μ sind bei Wasser noch weitere Absorptionsmaxima festgestellt worden bei 4,7 und 6,08 μ . Ich versuchte auch diese bei Eis zu finden und benutzte hierzu gefrorene Seifenlamellen. Über einem schalenförmigen Dewargefäß, das zur Hälfte mit flüssiger Luft gefüllt war, wurde die in horizontaler Lage befindliche Seifenlamelle zum Gefrieren gebracht und dann in den p. 327 beschriebenen Apparat, der auf einer Temperatur von -40 bis -50° gehalten wurde, hineingeführt. Die Seifenhaut befand sich in einem Drahtringe, der innen mit 4 Häkchen (vgl. Fig. 6) versehen war, um der dünnen und sehr spröden Eishaut besseren Halt zu geben. Kühlte man diesen Ring vor dem Ein-

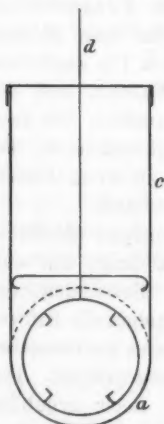


Fig. 6.

tauchen in die Seifenlösung stark ab¹⁾, so gelang es häufig, eine zusammenhängende, gefrorene Seifenlamelle zu erhalten. Diese dünnen Häutchen hatten zwar keineswegs das Aussehen von gefrorenem Wasser, glichen vielmehr feinen Pergamenthäutchen; da aber die Seifenlösung (aus gewöhnlicher Seife hergestellt) zu 95 Proz. aus Wasser bestand, so waren doch die Eigenschaften des Eises zu erwarten. Leider blieben die Häutchen nicht lange unverändert, zumal nur die dünnsten zur Absorptionsmessung verwandt werden konnten. Die in Fig. 7 angegebene Kurve ist gezeichnet nach etwa zehn Kurvenstückchen von verschiedenen Seifenhäutchen.

Bei $4,5 \mu$ ²⁾ liegt ein deutliches Maximum der Absorption, bei $5,2$ ein Minimum; von da an stieg die Absorption so stark an, daß das Maximum bei 6μ nicht mehr nachgewiesen werden konnte.

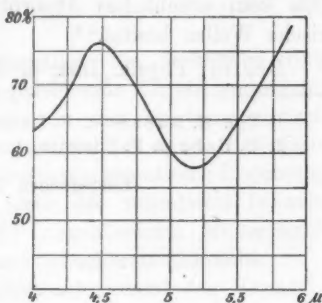


Fig. 7.

Aus den angeführten Messungen ist zu entnehmen, daß Eis auch im Ultraroten bis 6μ sich vollkommen analog dem Wasser verhält. Es sind dieselben Absorptionsmaxima festgestellt worden und die gleiche Stelle anomaler Reflexion. Hiernach scheint Eis keineswegs diathermaner zu sein als Wasser, wie bisweilen angenommen wird.)

Da die Dielektrizitätskonstante des Eises im Gegensatz zu der des Wassers dem Quadrate des optischen Brechungs-exponenten im sichtbaren Spektrum nahezu entspricht, so ist erstens daraus zu schließen, daß die bis jetzt bekannten Absorptionsmaxima des Wassers von keinem wesentlichen Ein-

1) Wird der Ring nicht vorher abgekühlt, so fällt die aus der Mitte der Lamelle gefrierende Seifenhaut aus dem Ring heraus, da die am Rande befindliche Seifenlösung, die sich infolge der Wärmekapazität des Ringes nur langsam abkühlen kann, zu dünn wird.

2) Die Verschiebung des Maximums nach kleineren Wellenlängen erklärt sich aus der tieferen Temperatur, die zur Erhaltung der Eislamelle angewandt werden mußte.

fluß¹⁾ auf den hohen Brechungsexponenten für kleine elektrische Wellen sind, und zweitens, daß bei Eis die im unerforschten ultraroten Spektralgebiete liegenden unbekannten Stellen anomaler Absorption, die man bei Wasser annehmen muß, nicht vorhanden sind.

Hierfür spricht auch die Tatsache, daß für Wasser eine starke Absorption kurzer elektrischer Wellen gefunden ist, die mit Verkleinerung der Wellen noch weiter zunimmt, während „Eis kein erhebliches Absorptionsvermögen für kurze elektrische Wellen besitzt.“²⁾

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., Juni 1909.

1) Vgl. H. Rubens u. E. Ladenburg, *Le Radium* 6. p. 38. 1909.

2) U. Behn u. F. Kiebitz, *l. c.* p. 617.

(Eingegangen 14. Juli 1909.)

8. Über
*die Bjerknессche hydrodynamische Analogie
 zu den elektrischen Erscheinungen;
 von Hans Witte.*

V. Bjerkness hat bekanntlich die berühmten Untersuchungen seines Vaters über pulsierende Kugeln weitergeführt und insbesondere die Analogie zu den elektromagnetischen Erscheinungen verfolgt.¹⁾ Neuerdings hat er in einer theoretischen Darlegung²⁾ bemerkenswerte mathematische Ergänzungen geliefert und schließlich in einer der rühmlichst bekannten Sammlung „Die Wissenschaft“ angehörenden Monographie³⁾ das Problem zu einem gewissen Abschlusse gebracht.

Der zweite Teil des Buches unternimmt den Versuch, in den eigenartigen Bewegungserscheinungen *mehr* zu sehen als eine überraschende und hochinteressante Analogie, nämlich Ansätze zu einer wirklich durchführbaren mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Dieser Erweiterung ihres Geltungsbereiches scheinen jedoch gewisse Bedenken entgegenzustehen, von denen die zwei gewichtigsten hier in Kürze auseinandergesetzt werden sollen.

Bekanntlich liefern die Bjerknессchen pulsierenden Körper genau dasselbe Kraftlinienbild wie elektrostatisch geladene Körper bzw. wie Magnetpole, aber die Kräfte haben das falsche Vorzeichen. Während gleichnamige elektrische Körper bzw. Magnetpole einander abstoßen, ziehen mit gleicher Phase pulsierende Bjerknессche Körper einander an, und umgekehrt.

1) V. Bjerkness, Recherche sur les champs de force hydrodynamiques. Acta Mathematica 30. p. 99. Stockholm 1905; Archives des Sciences phys. et nat. 20. Genf 1905.

2) V. Bjerkness, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 4. Nr. 3. 1907.

3) V. Bjerkness, Die Kraftfelder (Die Wissenschaft, Heft 28, Braunschweig, Vieweg 1909).

Dieser Umstand ist es ja auch gewesen, der von vornherein die Anschauung hervorgerufen hat, daß es sich nur um eine äußerliche Analogie handelt, wie sie zwischen einzelnen elektromagnetischen und einzelnen mechanischen Vorgängen bekanntlich zu Dutzenden aufgefunden sind. An dieser Stelle setzt die mathematische Untersuchung aus dem Jahre 1907 und insbesondere der zweite Teil des genannten Buches ein. Der Verfasser gibt eine Hypothese an, durch die man der Schwierigkeit werde entgegen können. Sie lautet folgendermaßen.

Die mit dem verkehrten Vorzeichen behaftete Wirkung bezieht sich auf den pulsierenden Körper. Denkt man sich zunächst, daß nur ein einziges Medium vorhanden ist (im Bilde der Weltäther), so ist der pulsierende Körper ein von der übrigen Flüssigkeit abgegrenzt gedachtes Flüssigkeitsquantum, das eben die Pulsationen ausführt, im Bilde also ein von dem übrigen Weltäther abgesondert gedachtes Weltätherquantum. Nimmt man dann nachträglich an, daß sich an der betreffenden Stelle auch ponderable Materie befindet — die übrigens die Ursache der Pulsationen des gedachten Ätherquantums sein mag — und daß auf diese ponderable Materie von dem Ätherquantum eine gleich große, aber *entgegengesetzt gerichtete* Kraft ausgeübt wird, so wird die der Theorie entsprechende Bewegung der ponderablen Materie mit der in Wirklichkeit beobachteten identisch sein. Mit anderen (nicht von Bjerknes gewählten) Worten: Die pulsierenden Körper, wie sie etwa bei den Bjerknesschen Experimenten zu sehen sind, entsprechen nicht der ponderablen Materie, sondern nur pulsierenden Ätherquanten, und sie zeigen demnach nicht die ponderomotorische Kraft \mathfrak{P} , sondern nur die „ätheromotorische“ Kraft \mathfrak{E} , d. h. eben die Wirkung, die die Resultante von inneren Spannungen X_1, X_2, X_3 usw. des Äthers auf ein Ätherquantum ist, und erst das Ätherquantum selber übt seinerseits eine der Kraft \mathfrak{E} entgegengesetzte ponderomotorische Kraft \mathfrak{P} auf etwa dort befindliche ponderable Materie aus; so bekommt man richtig z. B. bei zwei positiv geladenen (gleich pulsierenden) Massenteilchen eine anziehende ätheromotorische, aber gerade deswegen eine abstoßende ponderomotorische Kraft; die erstere sieht man nicht, die zweite ist die, die der Physiker wahrnimmt.

Der Verfasser selber scheint sich nicht zu verhehlen, daß diese Hypothese Widerspruch finden wird (vgl. p. 171). Es kann ja gewiß nicht bezweifelt werden, daß man zu dieser paradoxen Hypothese seine Zuflucht nehmen muß, wenn man durchaus in der Bjerknesschen Analogie mehr als eine Analogie sehen will. Die Hypothese selber aber — wenn die Ätherspannungen auf ein Ätherteilchen z. B. die Resultante + 317 g.cm/sec² ergeben, soll, wenn man ein ponderables Teilchen an die gleiche Stelle bringt, dieses genau die entgegengesetzte Kraft - 317 g.cm/sec² erfahren — ist doch wohl nicht nur paradox, sondern physikalisch (d. h. durch Nahewirkung, Druck, Zug oder Schubspannung) durchaus unvorstellbar.

Vielleicht hätte Bjerknes die paradoxe Hypothese gar nicht erst aufgestellt, sondern wäre bei der Erkenntnis stehen geblieben, daß es sich um eine äußerliche Analogie handelt, wenn er nicht noch obendrein eine mathematische Überlegung gefunden zu haben glaubte, die zu einem ähnlichen Resultate zu führen scheint. Gegen diese mathematische Überlegung richtet sich der zweite Einwand.

Statt der Bjerknesschen Bezeichnungen mögen auch weiterhin die in Deutschland üblichen angewandt werden. Der Gedankengang von Bjerknes ist der folgende.

Auf alle Fälle muß die Bewegungsgleichung des Weltäthers die Form haben:

$$(1) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}_x}{dt} = \mathfrak{D}_x - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.},$$

wenn k die Trägheit pro Volumeinheit bedeutet, \dot{q} die Geschwindigkeit, t die Zeit, d/dt die substantielle Änderungsgeschwindigkeit gleich $\partial/\partial t + \dot{q} \cdot \text{grad}$, \mathfrak{D} die äußere Kraft, X_x usw. die inneren Spannungen und x, y, z die Koordinaten im rechtsdrehenden System. Bezeichnet man die Resultierende der inneren Spannungen mit \mathfrak{R} , so kann man (1) auch schreiben

$$(2a) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

$$(2b) \quad \mathfrak{R}_x = - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

Dies ist die Form, auf die sich die Maxwellschen elektrischen Feldgleichungen bringen lassen müssen, wenn sie mechanisch gedeutet werden sollen. Die Glieder \mathfrak{R} und $k \cdot d\dot{q}/dt$ be-

ziehen sich dabei nur auf den Zustand bzw. die Bewegung im Äther. Denkt man sich nachträglich diese beiden Glieder allein vorhanden, so entspräche die Gleichung natürlich nicht mehr den Maxwellschen Feldgleichungen, da die vollständige Bewegungsgleichung noch die äußere Kraft \mathfrak{Q} (pro Volumeinheit) enthalten soll. Die Kraft \mathfrak{Q} ist also diejenige Kraft, die auf ein Volumelement von außen her angreifen muß, damit die Bewegung den Maxwellschen Gleichungen entsprechend verläuft. Infolgedessen muß in bekannter Weise¹⁾ der Äther selbst auf das Volumelement eine Kraft \mathfrak{F} (pro Volumeinheit) ausüben, welche der Kraft \mathfrak{Q} gleich und entgegengesetzt ist, so daß man zunächst für \mathfrak{Q} die Gleichung enthält

$$(3) \quad \mathfrak{Q} = -\mathfrak{F}.$$

Die Kraft \mathfrak{F} ist offenbar dieselbe, die oben bereits als ätheromotorische Kraft bezeichnet wurde; dieser ätheromotorischen Kraft \mathfrak{F} muß also die Kraft \mathfrak{Q} auf alle Fälle entgegengesetzt gleich sein. Nach der landläufigen und physikalisch verständlichen Auffassung würde die ätheromotorische Kraft \mathfrak{F} weiterhin, sobald ponderable Materie an die Stelle des Äthers tritt, mit der ponderomotorischen Kraft \mathfrak{P} identisch sein,

$$(4) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{P},$$

woraus sich für \mathfrak{Q} die Bestimmungsgleichung ergeben würde

$$(5) \quad \mathfrak{Q} = -\mathfrak{P},$$

d. h. die äußere Kraft \mathfrak{Q} müßte entgegengesetzt gleich sein dem bekannten Ausdruck \mathfrak{P} , den die Maxwellsche Theorie für die gesamte ponderomotorische Kraft liefert, nämlich

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P} &= + \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E} \cdot \text{div } \mathfrak{E} \\ &- \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \text{grad } \varepsilon - \frac{1}{4\pi} \cdot [\text{curl } \mathfrak{E}, \varepsilon \mathfrak{E}] \\ &+ \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 \cdot \text{grad } \mu - \frac{1}{4\pi} \cdot [\text{curl } \mathfrak{H}, \mu \mathfrak{H}] \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wenn man in bekannter Weise die elektrische und die magnetische Feldstärke mit \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} , die Dielektrizitätskonstante mit ε und die magnetische Permeabilität mit μ bezeichnet.

1) Vgl. H. Witte, Mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen p. 86 ff. Berlin 1906.

Zufolge der Bjerknesschen Hypothese soll aber die ätheromotorische Kraft \mathfrak{F} mit der ponderomotorischen \mathfrak{P} nicht identisch, sondern ihr entgegengesetzt gleich sein,

$$(7) \quad \mathfrak{F} = - \mathfrak{P},$$

so daß die Bestimmungsgleichung für \mathfrak{Q} lautet

$$(8) \quad \mathfrak{Q} = + \mathfrak{P}.$$

Bjerknes muß also in die allgemeine Ätherbewegungsgleichung (2) für die äußere Kraft \mathfrak{Q} den Maxwell'schen Wert (6) von \mathfrak{P} direkt, mit gleichem Vorzeichen, einsetzen. Damit dies geschehen könne, ist es nötig, die beiden Gleichungen heranzuziehen, die bei dieser mathematischen Deduktion die mechanische Deutung der beiden Feldstärken \mathfrak{E} und \mathfrak{H} geben sollen. Sie stimmen mit den bekannten Grundlagen der Kelvinschen Theorie des quasirigiden Äthers überein, lauten also in der üblichen Bezeichnung:

$$(9) \quad \mathfrak{E} = - \sqrt{\frac{4 \pi k}{\epsilon}} \cdot \dot{q},$$

$$(10) \quad \mathfrak{H} = + \sqrt{\frac{4 \pi h}{\mu}} \cdot u = + \sqrt{\frac{4 \pi h}{\mu}} \cdot \text{curl } q,$$

wobei zwischen den Konstanten h und k die Beziehungen bestehen:

$$(11) \quad h = \frac{c^2 \cdot k}{\mu \cdot \epsilon} = \frac{c^2 \cdot k_0}{\mu}, \quad k = \epsilon \cdot k_0,$$

ferner c die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther, k_0 die Dichtigkeit des freien Äthers bezeichnet und schließlich der Vektor $\text{curl } q = u$ als „Drehung“ gedeutet wird.¹⁾

Setzt man (9) und (10) in (6) ein, so erhält man gemäß (8) für die gesuchte äußere Kraft \mathfrak{Q} den Wert

$$(12) \quad \mathfrak{Q} = + \dot{q} \cdot \text{div } k \dot{q} - \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k - [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \right\} \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl } h u, u] \Bigg\}.$$

1) In der älteren Arbeit wird die Drehung mit dem Curl der Verschiebung q , in der neueren mit dem Zeitintegral über die Wirbelgeschwindigkeit $\text{curl } \dot{q}$ identifiziert; vgl. über diese Frage H. Witte, l. c. p. 130, sowie Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 502. 1906.

Diese Bedingung wird der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung (2) durch die neue Bjerknessche Hypothese auf-
erlegt. Hinzu tritt die bei jeder mechanischen Theorie der
Elektrodynamik zu erfüllende Forderung, daß die beiden Max-
well'schen Feldgleichungen richtig herauskommen, also für
Isolatoren (es genügt, diesen Fall zu betrachten) die beiden
Gleichungen:

$$(13) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial (e \cdot \mathfrak{E})}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H},$$

$$(14) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial (\mu \cdot \mathfrak{H})}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}.$$

Daraus folgen, wenn man wieder (9) und (10) berück-
sichtigt, genau wie beim Kelvinschen quasirigiden Äther die
Bedingungen:

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = -\text{curl } (k \cdot u),$$

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \text{curl } \dot{q}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ergibt sich unter
einer gewissen Vernachlässigung ($d/dt = \partial/\partial t$) unmittelbar
aus (10), stellt also physikalisch keine neue Bedingung dar,
sondern nur eine Definition. Die erste dagegen ist — immer
ganz wie beim quasirigiden Äther — die Bewegungsgleichung
des Äthers, muß also mit der im Anfang zugrunde gelegten
Gleichung (2) identisch sein. Im ganzen unterliegt demnach
die allgemeine Ätherbewegungsgleichung (2)

$$k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ usw.}$$

zwei Bedingungen:

1. der Bjerknesschen Bedingung (12) für die äußere
Kraft \mathfrak{D}

$$\mathfrak{D} = +\dot{q} \text{ div } k \dot{q} - \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k - [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \right\} \\ + \frac{1}{2} (k u)^2 \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{k} \right) - [\text{curl } k u, u];$$

2. der schon bei Lord Kelvins quasirigidem Äther vor-
handenen Bedingung, daß sie sich auf die Form (15) bringen läßt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = -\text{curl } (k \cdot u).$$

Verfügen kann man zu diesem Zwecke nur noch über die inneren Spannungen X_x usw. Bjerknes schlägt nun das folgende Verfahren ein.

Zunächst setzt er (wenn man von einem nebensächlichen konstanten Normaldruck p_0 sogleich absieht):

$$(17) \begin{cases} X_x = -\frac{1}{2} k \dot{q}^2 - \frac{1}{2} h u^2 + h u_x^2, & X_y = +h \cdot u_x + h \cdot u_x \cdot u_y, & X_z = \dots, \\ Y_x = -h \cdot u_x + h \cdot u_y \cdot u_x, & Y_y = \dots, & Y_z = \dots, \\ Z_x = +h \cdot u_y + h \cdot u_z \cdot u_x, & Z_y = \dots, & Z_z = \dots \end{cases}$$

Führt man diese Werte in die allgemeine Ätherbewegungsgleichung ein, so geht sie über in

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} &= \Delta + \text{grad} \left\{ \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot u^2 \right\} \\ &\quad - u \cdot \text{grad}(h \cdot u) - \text{curl}(h \cdot u). \end{aligned} \right.$$

Darauf formt er die linke Seite um. Erstens setzt er

$$(19) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}$$

und zweitens, unter Berücksichtigung der Continuitätsgleichung $\partial k / \partial t = -\text{div}(k \cdot \dot{q})$, in (19) wieder

$$(20) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) + \dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}),$$

also im ganzen

$$(21) \quad k \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) + \dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) + k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}.$$

Die beiden Glieder $\dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q})$ und $k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q}$ schafft Bjerknes dann auf die rechte Seite und erhält aus (18)

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) &= \Delta - \dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q}) \\ &\quad + \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) - k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} \right\} \\ &\quad + \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{2} h \cdot u^2 \right) - u \cdot \text{grad}(h \cdot u) \right\} - \text{curl}(h \cdot u). \end{aligned} \right.$$

Schließlich benutzt er noch die Identitäten

$$(23) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) - k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} = +\frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad} k - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}],$$

$$(24) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{2} h \cdot u^2 \right) - u \cdot \text{grad}(h \cdot u) = +\frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl} h u, u],$$

erhält infolgedessen statt (22) die Bewegungsgleichung

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = \mathfrak{Q} - \dot{q} \cdot \text{div} (k \dot{q}) \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k \\ + \frac{1}{2} (k u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{k} \right) \end{array} \right. - [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \end{array} \right\} - \text{curl} (k \cdot u)$$

und steht am Ziele. Berücksichtigt man jetzt die Bjerknessche Hypothese: Ätheromotorische Kraft entgegengesetzt gleich der ponderomotorischen Kraft, indem man für \mathfrak{Q} die Bedingung (12) einsetzt, so bleibt exakt

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot \dot{q}) = - \text{curl} (k \cdot u),$$

die der Maxwell'schen Gleichung (13) entsprechende zweite Bedingungsgleichung (15), welche die Bewegungsgleichung (2) erfüllen muß.

Es fragt sich, ob durch diese mathematische Herleitung die paradoxe Hypothese, daß der Äther mit einer der ätheromotorischen Kraft entgegengesetzten Kraft auf die eingebettete Materie wirke, gestützt wird. Das Gegenteil scheint der Fall zu sein.

Die äußere Kraft \mathfrak{Q} muß ihrem Sinne nach durch die Kraft \mathfrak{F} aufgehoben werden, die oben als ätheromotorische bezeichnet wurde, d. h. durch eine Resultante von inneren Ätherspannungen. Die Gleichung (25) enthält nun anscheinend als „ätheromotorische Kraft“ den Ausdruck

$$(27) \quad \mathfrak{F}' = - \dot{q} \cdot \text{div} (k \cdot \dot{q}) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k \\ + \frac{1}{2} (k u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{k} \right) \end{array} \right. - [\text{curl } \dot{q}, k \dot{q}] \left. \right\},$$

denn dieser Ausdruck ist entgegengesetzt gleich dem Bjerknesschen Werte (12) von \mathfrak{Q} und gegen ihn wird in der Tat beim Übergange von (25) auf (26) \mathfrak{Q} fortgehoben. Richtet man aber den Blick auf die Art, wie die der Form (25) vorhergehende Gestalt (22) der Bewegungsgleichung aus ihrer Vorgängerin (18) entspringt — nämlich durch bloßes Hinüberschaffen der späterhin Beiträge zu \mathfrak{F}' liefernden Glieder $\dot{q} \cdot \text{div } k \dot{q}$ und $k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad } \dot{q}$ von links nach rechts —, so sieht man, daß der Ausdruck \mathfrak{F}' tatsächlich *nicht* eine Resultante der zugrunde gelegten Spannungen (17) ist. Aus den inneren Spannungen (17) entstammen gemäß (18)

und (23), (24) lediglich das vierte und fünfte Glied (d. h. die beiden, die von u abhängen). Das zweite und dritte dagegen rühren nur zum Teil von den Spannungen (17) her (insofern nämlich das Glied $\text{grad } \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2$ in ihnen aufgegangen ist), im übrigen sind sie durch den Kunstgriff (19) gewonnen, und das ganze erste Glied schließlich hat gar nichts mit den inneren Spannungen (17) zu tun, es ist nichts als die Folge des weiteren Kunstgriffes (20). Die Bjerknessche äußere Kraft \mathfrak{Q} sieht sich also tatsächlich nicht einer gleich großen inneren Ätherresultante \mathfrak{F} gegenüber, die sie doch aufheben soll; es war eine Täuschung, wenn man annahm, der Bjerknessche „gyrostatistische Weltäther“ ergebe tatsächlich die ätheromotorische Kraft

$$(28) \quad -\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q}) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad } k \quad - [\text{curl } \dot{q}, k \cdot \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (k u)^2 \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{k} \right) - [\text{curl } k u, u] \end{array} \right\},$$

die von der Bjerknesschen Hypothese gefordert wird, die mathematische Deduktion, die die paradoxe Hypothese stützen soll, ist ebenfalls unhaltbar.

Will man etwa noch den Versuch machen, die Wirkung (28) nachträglich aus Ätherspannungen aufzubauen, so läßt sich jetzt leicht einsehen, daß das bei der Bjerknesschen Hypothese überhaupt unmöglich ist. Man betrachte etwa das Glied $-\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$. Soll dieses, aus inneren Ätherspannungen resultierend, auf der rechten Seite der Ätherbewegungsgleichung (2) bzw. (18) usw. stehen, dann muß erstens ein Spannungszustand existieren, der eben die Resultante $-\mathfrak{Q} = -\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$ liefert. Ferner aber enthält nach (21) die linke Seite $k \cdot d\dot{q}/dt$ der Bewegungsgleichung (2) usw. das Glied $+\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$, und dieses muß nach wie vor weggehoben werden, damit links, der Maxwell'schen Gleichung (13) bzw. (15) entsprechend, $\partial(k \dot{q})/\partial t$ frei wird. Das kann aber, da man lediglich über die Spannungen X_x usw. zu verfügen hat, nur durch einen zweiten Spannungszustand bestehen, der die Resultante $+\mathfrak{Q} = +\dot{q} \cdot \text{div}(k \dot{q})$ ergibt. Man müßte also einführen: 1. einen inneren Spannungszustand des Äthers mit der Resultante $-\mathfrak{Q}$, der einen Teil einer äußeren Kraft \mathfrak{Q} aufhebt, und 2. einen entgegengesetzt gleichen inneren Spannungszustand des Äthers mit der Resultante $+\mathfrak{Q}$,

der gemäß (21) einen Teil von $h \cdot d\dot{q}/dt$ aufhebt. Das würde natürlich keinen physikalischen Sinn haben; der Äther kann nicht vermöge innerer Spannungen gleichzeitig die Kraft $-\mathfrak{G}$ und die Kraft $+\mathfrak{G}$ ausüben, er übt dann eben gar keine Kraft aus und ein Spannungszustand existiert überhaupt nicht. Dasselbe gilt für die übrigen Glieder, soweit sie Bjerknes eben nicht selber aus inneren Spannungen hergeleitet hat. Damit fällt die Möglichkeit, die Bjerknessche ätheromotorische Kraft aus inneren Ätherspannungen aufzubauen; der Weltäther ist, wenn er die Maxwell'schen Gleichungen (13), (14) ergeben soll, überhaupt nicht imstande, die von Bjerknes beabsichtigte, der gewöhnlichen Anschauung entgegengesetzte ätheromotorische Kraft (28) zu liefern.

Man hat also in der Tat hier wieder einmal einen der vielen Fälle vor sich, in denen es sich um eine *unvollständige*, wenn auch durch ihre Paradoxie zunächst überraschende Analogie von Bewegungsvorgängen zu den elektromagnetischen Erscheinungen handelt. — — —

Folgendes mag noch erwähnt werden. Wenn man einmal daran geht, den Bjerknesschen Ansatz für die Spannungen X_x usw. zu ändern, dann liegt vielleicht auch ein anderes Spannungssystem nahe, das zum Teil bei einer früheren Untersuchung über Lord Kelvins quasirigiden Äther¹⁾ benutzt worden ist. Aus dem Bjerknesschen kann man es erhalten, indem man einige Vorzeichen ändert und einige Glieder hinzufügt. Man gehe wieder aus von der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung (2)

$$h \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ usw.}$$

und setze

$$X_x = +\frac{1}{2} h \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot u^2 - 2 h \cdot \dot{q}_x^2 - h u_x^2,$$

$$X_y = +h \cdot u_x - 2 h \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{q}_y - h \cdot u_x \cdot u_y,$$

$$X_z = \dots,$$

1) H. Witte, l. c. p. 86.

$$Y_x = -h \cdot u_x - 2k \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{q}_x - h \cdot u_y \cdot u_x,$$

$$Y_y = \dots,$$

$$Y_z = \dots,$$

$$Z_x = +h \cdot u_y - 2k \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{q}_x - h \cdot u_x \cdot u_x,$$

$$Z_y = \dots,$$

$$Z_z = \dots.$$

Dann geht die allgemeine Gleichung (2) nicht über in (18), sondern in

$$h \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{D} + 2\dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) - \text{grad} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot u^2 \right) \\ + 2k \cdot \dot{q} \cdot \text{grad} \dot{q} + u \cdot \text{grad}(h \cdot u) - \text{curl}(h \cdot u),$$

oder unter Einsetzen von (21) und Berücksichtigung von (23) und (24) in

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \cdot \dot{q}) = \mathfrak{D} + \dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) \\ - \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad} k \quad - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl} h u, u] \end{array} \right\} - \text{curl}(h \cdot u).$$

Jetzt aber kann man für \mathfrak{D} den wirklichen Maxwell'schen Wert einführen, der also die umgekehrten Vorzeichen wie das Bjerknessche \mathfrak{D} aufweist (vgl. (12)):

$$\mathfrak{D} = -\dot{q} \cdot \text{div}(k \cdot \dot{q}) + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \cdot \text{grad} k \quad - [\text{curl} \dot{q}, k \dot{q}] \\ + \frac{1}{2} (h u)^2 \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{h} \right) - [\text{curl} h u, u] \end{array} \right\},$$

denn es bleibt alsdann exakt übrig wieder die der Maxwell'schen Gleichung (13) entsprechende erste Bedingungsgleichung (15)

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \cdot \dot{q}) = -\text{curl}(h \cdot u).$$

Bis hierhin könnte man diese Interpretation, die die ätheromotorische Kraft gleich der Maxwell'schen ponderomotorischen Kraft setzt, auf den ersten Blick wohl für eine aussichtsvolle Variante der Bjerknesschen Theorie ansprechen. Allerdings auch diese nur bis hierhin. Es darf daran erinnert werden, daß weitere grundsätzliche Einwände gegen *alle* Theorien, die auf den Lord Kelvinschen ((9) und (10)) oder verwandten

Grundvoraussetzungen aufgebaut sind, also Einwände, die in gleicher Weise den Bjerknesschen Versuch wie die soeben aufgestellte Variante treffen, bereits vor einigen Jahren an anderer Stelle¹⁾ erörtert worden sind. Es ist, wie weitere Untersuchungen²⁾ seinerzeit ergeben haben, überhaupt unmöglich, die elektrischen Erscheinungen mechanisch zu erklären, solange man an der Hypothese eines kontinuierlichen Weltäthers festhält. Wer heutzutage noch daran denkt, einen mechanischen Erklärungsversuch der Elektrodynamik aufzufinden, muß die Annahme zugrunde legen, daß der gesamte Weltäther überall in diskrete Teilchen, in Ätheratome zerfällt.

1) l. c. p. 90 ff.

2) l. c. p. 219, sowie Ann. d. Phys. 26. p. 235—311. 1908.

(Eingegangen 27. Juni 1909.)

9. Über positive Strahlen; von W. Wien.

Zweite Abhandlung.

(Aus den Sitzungsber. der K. bayer. Akad. der Wissensch. in München vom 3. Juli 1909, mit einigen Zusätzen.)

I. Beobachtungen an positiven Strahlen des Wasserstoffs.

A. Magnetische Einwirkung bei verschiedenen Drucken und verschiedener Spannung.

In meiner Mitteilung vom 7. März 1908¹⁾ hatte ich über Versuche berichtet, aus denen hervorging, daß die positiven Strahlen nicht dauernd geladen sind, sondern ihre Ladungen nach längerer oder kürzerer Zeit verlieren und wieder annehmen, so daß man von einem Gleichgewichtszustande sprechen kann, bei welchem die eine Zeitlang geladenen Ionen einen bestimmten Bruchteil der Gesamtmenge der bewegten Atome ausmachen. Ich hatte damals schon darauf hingewiesen, daß dieser Zustand möglicherweise in sehr hohem Vakuum ein anderer sei, da doch kaum zu bezweifeln ist, daß die Herstellung des Gleichgewichtszustandes und damit die beständige Veränderung des Ladungszustandes der einzelnen Atome durch die Zusammenstöße mit den ruhenden Gasmolekülen hervorgerufen wird.

Die Versuche, die ich zunächst in der Richtung anstellte²⁾, um den Einfluß der Gasverdünnung zu untersuchen, gründeten sich auf die Eigenschaft der Holzkohle, Gase bei der Temperatur der flüssigen Luft sehr schnell und vollständig zu absorbieren. Indem der eigentliche Beobachtungsraum mit der Entladungsröhre durch eine Kapillare verbunden war, konnte im ersten durch die absorbierende Holzkohle ein hohes Vakuum aufrecht erhalten werden, während in der Entladungs-

1) W. Wien, Sitzungsber. der K. bayer. Akad. der Wissensch. 38. p. 55. 1908.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. p. 1033. 1908.

röhre beständig etwas Luft einströmte, um den zur Entladung erforderlichen Druck herzustellen. Hier zeigte sich nun, daß die charakteristische Eigenschaft der positiven Strahlen, nämlich die Wiederbildung positiver Ionen, bestehen blieb, während indessen im hohen Vakuum die magnetische Einwirkung auf die Strahlen sich sehr verringerte.

Obwohl nun die Methode der Anwendung der flüssigen Luft ein sehr hohes Vakuum ergibt, hat sie für den vorliegenden Zweck den wesentlichen Nachteil, daß von der gekühlten Holzkohle von dem praktisch vorkommenden Gase sämtlich außer Wasserstoff absorbiert werden, der letztere also gerade übrig bleibt. Andererseits wirkt die flüssige Luft als scharfes Trockenmittel und es ist nicht ausgeschlossen, daß die Beseitigung der Wasserdampfreste auch die aus ihnen durch die Entladung gebildeten Wasserstoffmengen fortnimmt.

Es besteht daher keine Sicherheit, daß unter diesen Verhältnissen der Wasserstoffrest mit und ohne Anwendung der flüssigen Luft derselbe bleibt und es schien deshalb durchaus erwünscht, die magnetische Ablenkbarkeit der unter gleichen Bedingungen im Wasserstoff erzeugten Strahlen bei verschiedenen hohen Drucken zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke wurde folgende Anordnung getroffen (Fig. 1). Hinter der Eisenkathode K der Entladungsröhre,

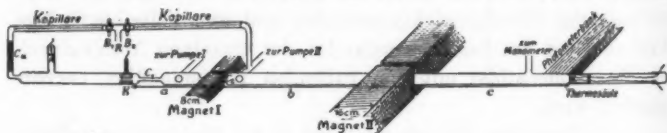


Fig. 1.

durch deren Durchbohrung die Kanalstrahlen austreten, verengt sich die Röhre zu einer Kapillaren C_1 . Dann folgt eine kurze weite Röhre mit dem Ansatzrohr, das zur Gaedepumpe I führt. An diese weite Röhre schließt sich eine zweite Kapillare C_2 , die wieder in eine lange weite Röhre übergeht. Die weiten Röhren haben einen Durchmesser von ca. 33 mm. Hinter der zweiten Kapillare C_2 befindet sich das zur Gaedepumpe II führende Ansatzrohr. In dieses Ansatzrohr mündet eine Glaskapillare, die durch den Hahn B_2 verschließbar ist

und mit einem mit Wasserstoff gefüllten Gefäß durch die Röhre R kommuniziert. Der zweite Hahn B_1 gestattet, den Wasserstoffstrom in eine zweite Kapillare zu leiten, die mit dem Ende der Entladungsröhre verbunden ist. Wenn der Wasserstoffstrom diesen Weg nimmt, so wird bei beständiger Tätigkeit beider Gaedepumpen sich zunächst eine Druckdifferenz zwischen den Enden der Kapillare C_1 und dann eine weitere an den Enden von C_2 ausbilden. In dem langen Glasrohr herrscht in diesem Falle ein niedrigerer Druck als im Entladungsrohr, der an einem Mac Leodschen Manometer gemessen wird.

Öffnet man dagegen den Hahn B_2 , während B_1 geschlossen ist und läßt nur die Pumpe I gehen, so bildet sich eine entgegengesetzte Druckdifferenz an der Kapillare C_2 aus. In diesem Falle ist also der Druck in der Beobachtungsröhre größer als in der Entladungsröhre. Die Druckdifferenzen hängen von den Dimensionen der beiden Kapillaren C_1 und C_2 ab.

Bei der einen Versuchsreihe war die Länge von $C_1 = 5$ cm, von $C_2 = 5$ cm, während der Durchmesser von $C_1 = 2$ mm, der von $C_2 = 6$ mm betrug. Die zugehörigen Abmessungen betragen

$$\begin{aligned} a &= 33 \text{ cm} \\ b &= 77 \text{ „} \quad (\text{Anordnung I}). \\ c &= 54 \text{ „} \end{aligned}$$

Bei der zweiten Versuchsreihe war die Länge von $C_1 = 7$ cm, von $C_2 = 7$ cm, während die Durchmesser 2 und 3 mm betrugen. Hier waren

$$\begin{aligned} a &= 19 \text{ cm} \\ b &= 77 \text{ „} \quad (\text{Anordnung II}). \\ c &= 54 \text{ „} \end{aligned}$$

Von den beiden Elektromagneten, durch deren Feld die Röhre ging, war der erste ein Hufeisenmagnet mit Eisenquerschnitt von 8 cm Durchmesser. Der zweite bestand aus einem flachen Eisenringe, an dem von innen die rechteckigen umwickelten Eisenstücke von 16 cm Kantenlänge angeschraubt waren. Beide haben verhältnismäßig geringe Streuung. Da die Wirkung beider Magnete sehr bedeutend war, so wurde

bei den Versuchen mit Wasserstoff nur mit sehr schwachen Feldern gearbeitet.

Das Sammelgefäß für den Wasserstoff wurde ebenso wie das ganze Röhrensystem mit einer Gerykölpumpe ausgepumpt, der Wasserstoff entweder aus reinem Zink und Schwefelsäure oder elektrolytisch aus verdünnter Phosphorsäure entwickelt.

Die Messung der transportierten Elektrizitätsmenge habe ich diesmal nicht als Maß für die Intensität der Strahlen benutzt, da diese Methode wohl unter gleichen Bedingungen in der Röhre brauchbar ist, aber wahrscheinlich keine direkt vergleichbaren Ergebnisse liefert, wenn man mit verschiedenen Graden der Luftverdünnung arbeitet.

Es wurde deshalb in erster Linie die Wärmewirkung auf einer Thermosäule untersucht. Diese Säule ist eine Mellonische Wismut-Antimonsäule, die den Vorteil hat, daß ihre Empfindlichkeit unabhängig vom Vakuum ist und ferner, daß sie sämtliche Strahlen ihres Querschnittes auffängt. Dieser Querschnitt betrug 1,259 cm.

Die Thermosäule war mit einem Siemensschen Glockengalvanometer verbunden, das die durchaus konstante Empfindlichkeit von $2,4 \cdot 10^{-8}$ Amp. für den Skalenteil hatte, wie die wiederholte Kontrolle ergab. Die auf die Thermosäule fallende Elektrizitätsmenge war klein im Vergleich mit dem Thermostrom, so daß der eine Teil der Säule mit der Erde verbunden werden konnte. Übrigens gab die Thermosäule den gleichen Ausschlag, ob der eine oder der andere Pol mit der Erde verbunden, oder ob sie ganz isoliert war.

Eine besondere Prüfung der Proportionalität der Ausschläge mit der Intensität der auffallenden Strahlung wurde in der Weise vorgenommen, daß die Thermosäule in eine evakuierte Röhre eingeschlossen war, die durch eine aufgekittete Glasscheibe abgeschlossen wurde. Durch diese fiel die Strahlung einer mit konstanter Spannung brennenden Glühlampe, deren Entfernung von der Säule verändert wurde. Die Ausschläge waren sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung innerhalb weiterer Grenzen als für die Beobachtungen in Betracht kam.

Außer der Wärmewirkung sollte die Lichtemission der Kanalstrahlen unter verschiedenen Verhältnissen beobachtet

werden. Zu diesem Zwecke war rechtwinklig zur Röhre eine Photometerbank unverrückbar fest aufgestellt. An ihrem Ende war eine Milchglasplatte von 8 cm Länge so befestigt, daß sie die Hälfte der Röhre bedeckte. Die Milchglasplatte erhielt Licht von einer auf der Photometerbank verschiebbaren, mit Wasserstoff gefüllten Geisslerschen Röhre. Da von der Photometerbank trotz ihrer Schwärzung Lichtreflexe nicht ganz zu vermeiden waren, wurde mit einem Leonhard Weberschen Photometer und einer auf der Bank verschobenen Glühlampe das Entfernungsgesetz geprüft und bestätigt. Bei der photometrischen Messung wurde die Helligkeit des mittleren Teiles der Röhre mit der der Milchglasplatte verglichen.

Die Konstanz der Geisslerschen Röhre prüfte ich in der Weise, daß sie an eine bestimmt, markierte Stelle der Bank geschoben und ihr Licht durch ein, ebenfalls an eine fixierte Stelle gesetztes, totalreflektiertes Prisma auf ein Lummer-Brodhunsches Kontrastphotometer geworfen wurde. Als Vergleichslichtquelle diente eine an einem Metallschlitten befestigte Glühlampe, deren Licht durch farbige Platten dem der Geisslerschen Röhre möglichst ähnlich gemacht war. Die Spannung der Glühlampe wurde durch ein Präzisionsvoltmeter kontrolliert. Die Geisslersche Röhre wurde im allgemeinen auf gleicher Helligkeit gehalten, indem der Primärstrom des kleinen, mit Turbinenunterbrecher getriebenen Induktionsapparates verändert wurde, bis wieder gleiche Helligkeit eintrat. Übrigens war eine Regulierung der Geisslerschen Röhre nur selten erforderlich.

Das MacLeodsche Manometer hatte ein Volumen von 500 ccm. Die Entladungsröhre wurde mit einer Influenzmaschine von 20 Platten betrieben, die Spannung an einer Funkenstrecke zwischen Kugeln von 2 cm Durchmesser gemessen.

Es wurde nun zunächst die Wärmewirkung der Kanalstrahlen bei verschiedenem Gasdruck mit und ohne Magnetfeld II verglichen und ebenso die photometrische Helligkeit. Die nach der Erregung des Magneten II übrigbleibende Wärmewirkung auf die Thermosäule oder Helligkeit ist unter der Rubrik *A* in der Tab. I in Prozenten der ungeschwächten Wirkung angegeben. In Rubrik *B* stehen die entsprechenden

Zahlen wenn noch Magnetfeld I erregt ist. Ferner sind in der Tabelle die zugehörigen Drucke und Spannungen angegeben. Bei jeder einzelnen Messung ist der stationäre Zustand der Gasfüllung von neuem hergestellt.

Tabelle I.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf Wärmewirkung und Lichtemission.

Anordnung I.

Wärmewirkung				Helligkeit			
Druck mm	A	B	Spannung Volt	Druck mm	A	B	Spannung Volt
0,0128	34 %	36 %	30600	0,0128	58 %	61 %	30600
0,0110	41	51	27400	0,011	62	57	27400
"		47	"				
0,046	23	32	27800	0,046	43	44	28800
0,051	24	32	27400	0,051	39	43	27400
"	28		"	"	40	43	"

Aus der Tab. I geht bereits deutlich hervor, daß die bei gleicher Spannung erzeugten Kanalstrahlen, wenn sie in das Gas von höherer Verdünnung treten, magnetisch weniger beeinflußt werden, als wenn sie sich bei geringerer Verdünnung fortbewegen. Dasselbe gilt für die magnetische Schwächung der Helligkeit. Nur daß hier die Strahlen sehr viel mehr in ihrer Wärmewirkung als in ihrer Lichtemission beeinflußt werden, eine Tatsache, die sich bereits früher bei der Beobachtung der transportierten Elektrizitätsmenge ergeben hatte, die auch erheblich stärker beeinflußt wurde als die Lichtemission.

Immerhin schien es mir erforderlich, den Unterschied im Gasdruck noch weiter zu treiben, um den Unterschied der magnetischen Einwirkung noch deutlicher zu erhalten.

Deshalb wurde die Kapillare C_2 enger und beide Kapillaren etwas länger gemacht (vgl. p. 351).

Die Beobachtungen mit dieser Anordnung sind in Tab. II zusammengestellt. Hier sind die Unterschiede in der magnetischen Einwirkung so groß, daß sie gänzlich außerhalb der

möglichen Beobachtungsfehler liegen. Dies gilt sowohl für die Verminderung der Wärmewirkung als für die der Lichtemission durch das magnetische Feld.

Tabelle II.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf Wärmewirkung und Lichtemission.

Anordnung II.

Wärmewirkung				Helligkeit			
Druck mm	A	B	Spannung Volt	Druck mm	A	B	Spannung Volt
0,0042	37 %	42 %	31200	0,0042	56 %		31200
0,0053	44	51	32300	0,0053	55	60 %	29100
"		49	"	0,0060	64	67	23700
0,0060	45	48	21200	0,0045	64	61	23100
0,0045	47	51	22300	"	65	59	"
"	48	49	"	0,091	25		35400
0,091	17		35400	0,11	19		31200
0,11	12		31200	0,109	22		26100
0,109	22		26100	"	22		"
"	16		26100	"	23		"
0,107	19		26100	0,107	24		26100
"	26		"	"	24		"
0,127	12		22300	0,101		24	28900
"	14		"	"		26	"
0,096	15	20	30000	0,096	13		30500
					16		

Durch diese Beobachtungen ist somit der Beweis erbracht, daß die magnetische Einwirkung auf die unter gleichen Bedingungen erzeugten positiven Strahlen bei hoher Verdünnung geringer ist als bei höherem Gasdruck.

Auch die Messung der transportierten Elektrizitätsmenge zeigt das gleiche Ergebnis; diese in Tab. III aufgenommenen Messungen sind mit einem hohlen Messingzylinder als Auffänger vorgenommen, der mit einem Siemensschen d'Arsonvalgalvanometer verbunden war, dessen Empfindlichkeit $2,8 \cdot 10^{-10}$ Amp. für den Skalenteil betrug.

Tabelle III.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf die transportierte Elektrizitätsmenge.

Anordnung II.

Druck mm	Strom	Helligkeit	Spannung Volt
0,013	32 %	38 %	26100
0,013	33	38	"
0,013	35	38	"
0,017	30		"
0,017	30		13000
0,057	15	33	26100
0,057	16	28	"
0,058	17	33	"
0,058	16	34	"
0,077	19		13000
0,077	18		"

Das magnetische Feld des Magneten II, der hier allein benutzt wurde, verhielt sich zu dem früheren wie 1,37:1. Die Schwächung des Stromes zeigt sich hier beim höheren Druck wesentlich stärker als die der Helligkeit, was von mir bereits früher beobachtet war.

Aus den Tab. I und II geht ferner hervor, daß kein erheblicher Unterschied zwischen den Zahlen unter *A* und *B* besteht. Die von mir bereits früher an der transportierten Elektrizitätsmenge gemachten Messungen, aus denen hervorging, daß das von einem Magneten beeinflusste Bündel positiver Strahlen sich in einem zweiten magnetischen Felde ebenso verhält, wie ein nicht beeinflusstes, bestätigt sich auch bei den Messungen der Wärmewirkung und der Helligkeit. Es können also die langsamen Kanalstrahlen nicht wesentlich stärker abgelenkt werden, da sonst nach Einwirkung von Magnet I die Strahlen weniger ablenkbar sein müßten. Ferner zeigt sich die magnetische Einwirkung bei annähernd gleicher Verdünnung nicht merklich abhängig von der Entladungsspannung.

Um diese Beobachtungen auch auf niedrigere Spannungen auszudehnen, für die die Entfernung der Thermosäule von der

Kathode zu groß war, wurde die Thermosäule in eine Entfernung von 55 cm von der Kathode gebracht.

In Tab. IV a und b ist unter *C* die nach Erregung von Magnet I übrig bleibende Wärmewirkung oder Helligkeit in Prozenten der ursprünglichen angegeben. IV a enthält die Messungen im Gase von höherem Druck, IV b die bei niedrigem Druck. Die Einwirkung des Magneten auf die Helligkeit war im letzteren Falle so gering, daß sie nicht mehr gemessen werden konnte. *Weder bei höherem noch bei niederem Gasdruck ist die magnetische Einwirkung in erkennbarer Weise von der Spannung abhängig.* Auch hier zeigt sich eine starke Abhängigkeit der magnetischen Einwirkung von der Größe des Gasdruckes, indem bei niedrigen Drucken die positiven Strahlen weniger stark magnetisch beeinflußt werden.

Tabelle IVa.

Abstand der Thermosäule von der Kathode 55 cm.

Anordnung II.

Wärmewirkung			Helligkeit	
Druck mm	<i>C</i>	Spannung Volt	<i>C</i>	Spannung Volt
0,107	40,5 %	24500		
"	40,4	"		
0,119			58 %	17400
0,102	42,3	26100		
"	43,6	"		
0,132			53,4	14400
"	46,7	15400		
0,102	41	25200		
0,139	44,3	13000	53,1	14400
"	42,0	"	52,5	"
0,137	44,4	14400	49,3	"
0,117	43,4	16000		
0,077	38,2	37700 ¹⁾		
0,137			53	14400
"			54	"

1) Entladung nicht ganz regelmäßig.

Tabelle IVb.

Abstand der Thermosäule von der Kathode 55 cm.

Anordnung II.

Wärmewirkung		
Druck mm	C .	Spannung Volt
0,0065	64,3 %	16000
"	62,7	"
0,0061	67,1	19900
"	66,7	"
0,007	65,6	8100
"	67,8	"
0,005	71,0	6700
"	72,5	"
0,004	70	31200
"	71,8	"

B. Vergleich von Wärmewirkung und Helligkeit bei verschiedenen Drucken.

Ferner wurde noch das Verhältnis der Wärmewirkung zur Helligkeit bei verschiedenen Gasdrucken miteinander verglichen und zwar zunächst bei den beiden ursprünglichen Anordnungen in großer Entfernung von der Kathode (I und II, p. 351). Unter der Überschrift „Reduzierter Ausschlag“ sind die Ablenkungen des Galvanometers, bezogen auf dieselbe Helligkeit, in willkürlichen Einheiten in die Tab. V aufgenommen. Man ersieht, daß sowohl bei Anordnung I wie noch mehr bei Anordnung II, wo die Druckunterschiede größer sind, die linksstehenden reduzierten Ausschläge bei gleicher Spannung wesentlich kleiner sind als die rechtsstehenden. Die ersteren sind bei höheren, die letzteren bei niedrigen Gasdrucken beobachtet.

1) Entfernung der Thermosäule von der Kathode 81 cm.

Tabelle V.
Anordnung I.

Druck mm	Reduzierter Ausschlag b	Spannung Volt	Druck mm	Reduzierter Ausschlag a	Spannung Volt	$\frac{b}{a} \cdot 100$
0,044	104	25200	0,0116	206	25800	50
0,052	104	25800				
0,051	207	27400	0,010	323	27400	64
0,046	237	30000	0,0092	368	30000	65
0,049	253	30000	0,0092	383	30000	66
0,046	215	30100	0,0094	442	30200	49

Anordnung II.

0,109	41,3	23100	0,0060	197	21200	21
0,107	107	26100	0,0045	262	22300	
0,096	88	30500	0,0053	333	30000	26,5
0,11	58	31200	0,0042	332	31200	17,7
0,091	80,8	35400				

Hieraus folgt, daß bei gleicher Wärmewirkung die Lichtintensität bei derselben Spannung in höheren Verdünnungen wesentlich kleiner ist als bei geringeren Verdünnungen. Jedoch bleibt noch zu untersuchen, wie weit die stärkere Lichtemission bei höherem Gasdruck auf Rechnung der ruhenden Atome zu setzen ist.

Die letzten Beobachtungen wurden noch unter anderen Bedingungen ausgeführt. Die Thermosäule wurde nahe an die zweite Glaskapillare geschoben, so daß ihr Abstand von C_2 13,5 cm betrug. Dann gingen die Kanalstrahlen noch als scharf begrenztes Bündel bis auf die Thermosäule und wurden vollständig von ihr aufgefangen. Die Beobachtung geschah hier bei gleicher photometrischer Helligkeit, indem durch Regulierung der Touren der Influenzmaschine gleiche Lichtemission erreicht wurde; die Photometrie geschah in der Weise, daß zwei von der Firma Schmidt & Hänsch montierte totalreflektierende Prismen A (Fig. 2), die von dem Kanalstrahlenbündel kommenden Strahlen und die einer Glühlampe B , die durch einen Spalt und geeignete Farbenfilter gingen, so nach C lenkten, daß man hier die

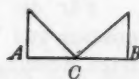


Fig. 2.

beiden gleich großen Felder unmittelbar nebeneinander sah. Trotz der viel größeren Helligkeit des Kanalstrahlenbündels war doch die Genauigkeit der photometrischen Einstellung geringer als bei den an sich lichtschwächeren aber ausgedehnteren Feldern der zerstreuten Kanalstrahlen in größerer Entfernung.

Die Beobachtungen sind in Tab. VI zusammengestellt. Auch hier bestätigt sich die Tatsache, daß die Lichtemission bei höherem Druck bei gleicher Spannung erheblich größer ist als bei niederem Druck, beide auf gleiche Wärmewirkung bezogen.

Tabelle VI.

Anordnung II. Entfernung der Thermosäule 34,5 cm von der Kathode.

Spannung Volt	<i>a</i>		<i>b</i>		$\frac{a}{b} \cdot 100$
	Druck mm	Ablenkung des Galvano- meters	Druck mm	Ablenkung des Galvano- meters	
20400	0,0058	580	0,112	160	28
23100	0,0060	742	0,108	258	36
26100	0,0050	584	0,102	294	55
26300	0,0068	706	0,105	340	48
26100	0,0050	588	0,075	228	42
26100	0,0047	642	0,077	312	49
28800	0,0050	889	0,087	412	46

Die Beobachtungen selbst ergaben, daß bei gleicher Spannung im hohen Vakuum die Lichtemission etwas kleiner war, wenn die Influenzmaschine konstant blieb, während die Wärmewirkung erheblich größer war als im niedrigeren Vakuum.

C. Abhängigkeit von der Entfernung.

Für die Beurteilung der Beziehungen zwischen Lichtemission und Wärmewirkung der Strahlen war es zweckmäßig, einige Messungen über die Abhängigkeit der beiden Wirkungen von der Entfernung auszuführen. Zu dem Zweck wurden zwei optische Bänke, auf denen derselbe Schlitten mit der Geissler'schen Röhre verschoben werden konnte, in einer Entfernung von 72 cm rechtwinkelig zur Röhre befestigt. Ferner wurde

für diesen Zweck eine neue Thermosäule benutzt, die magnetisch in der Röhre verschiebbar war. Diese Säule besteht aus einem dünnen, den Querschnitt der Röhre füllenden Silberblech, welches 28 Lötstellen aus Eisenkonstantandraht, durch eine dünne Schellackschicht getrennt, berührten. Diese Anordnung hat den Vorteil, daß sämtliche in der Röhre befindlichen Kanalstrahlen von der Säule aufgefangen werden.

Einige Messungen bei verschiedenen Drucken sind in der Tab. VII mitgeteilt. Stellung I ist die nähere, II die entferntere. In der dritten Spalte ist die Entfernung der beiden Stellungen der Thermosäule, in der sechsten die der beiden Photometerbänke angegeben. Die Prozente bedeuten die in Stellung II erhaltene Wirkung, wenn die in I gleich 100 gesetzt wird.

Tabelle VII.

Druck 0,155 mm. Spannung 33000 Volt.

Thermosäule Skt.	Stellung	Ent- fernung von I u. II cm	Proz.	Entfernung der Geisslerschen Röhre	Ent- fernung von I u. II cm	Proz.
270	I	} 70	12	64	} 72	14,5
32	II			166		
245	I	} 70	13	63	} 72	14
33	II			166		

Druck 0,0037 mm. Spannung 32400 Volt.

440	I	} 70	34	72	} 72	32
150	II			127		
480	I	} 73	30	75	} 72	32
142	II			132		

Man sieht, daß sowohl bei dem höheren, wie bei dem niedrigeren Druck die Abnahme der Wärmewirkung sehr nahe dieselbe ist wie die der Lichtwirkung.

Sehr auffallend ist, daß, trotzdem der Druck bei der einen Beobachtung mehr als das 40 fache beträgt als bei der anderen, der Schwächungsindex noch nicht den doppelten Betrag im

ersten Falle erreicht. Wahrscheinlich wird ein erheblicher Teil der Kanalstrahlen von den Wänden der Glasröhre absorbiert, doch bedarf dies Verhalten der weiteren Untersuchung.

II. Versuche mit Luft.

Aus Luft erzeugte Kanalstrahlen lassen sich ohne alle Schwierigkeit in ein hohes Vakuum leiten, wenn man sie durch eine enge Kapillare in den Beobachtungsraum gehen läßt und in diesem die Luft durch Holzkohle, die durch flüssige Luft abgekühlt ist, absorbiert.

Um hier die Kanalstrahlen bei verschiedenem Druck zu beobachten, wurde die Anordnung Fig. 3 gewählt. Man kann entweder das Gefäß G_1 oder G_2 in flüssige Luft tauchen und die durch die Kapillare C einströmende Luft entweder vom

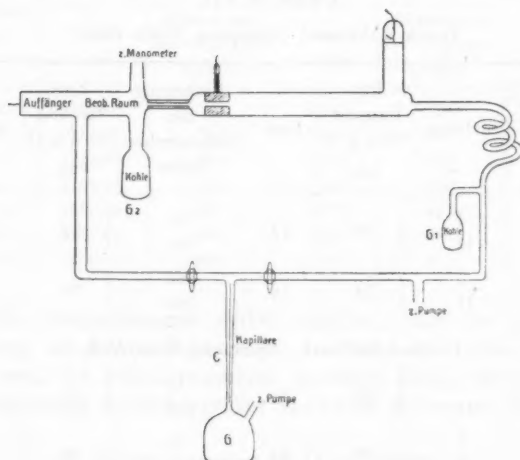


Fig. 3.

Beobachtungsraum nach der Entladungsröhre oder umgekehrt strömen lassen. Im ersten Falle wird der Druck im Beobachtungsraum bei gleichem Druck in der Entladungsröhre größer sein als im zweiten. Den Druck in der Entladungsröhre reguliert man durch Änderung des Druckes im Gefäß G .

Die Intensität der Kanalstrahlen ist hier nur durch die Messung der transportierten Elektrizitätsmenge bestimmt (vgl. p. 352).

Die Lichtemission wurde in ganz ähnlicher Weise wie bei den Versuchen mit Wasserstoff durch Vergleichung mit dem Licht einer Geisslerschen Röhre gemessen, die eine an der Röhre angebrachte Milchglasplatte beleuchtete und auf einer Photometerbank verschoben werden konnte.

Die Ergebnisse sind in der Tab. VIII, p. 364 zusammengestellt und in der Fig. 4 graphisch eingezeichnet. Die transportierte Elektrizitätsmenge ist in Skalenteilen angegeben. Die Empfindlichkeit des Galvanometers betrug $2,5 \cdot 10^{-10}$ Amp. a ist die Entfernung der Geisslerschen Röhre auf der Photometerbank, so daß $\text{const.}/a^2$ das Maß für die Helligkeit der positiven Strahlen ist.

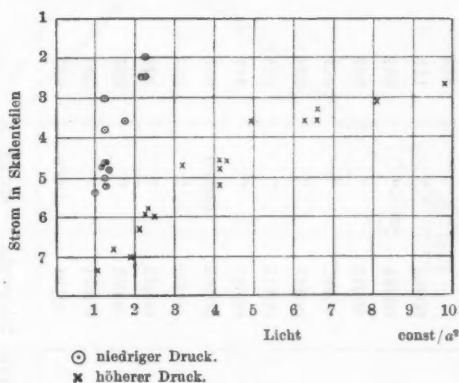


Fig. 4.

Man sieht aus Fig. 4, daß ebenso wie beim Wasserstoff die Lichtemission bei niedrigem Druck im Vergleich zur transportierten Elektrizitätsmenge kleiner ist als bei höherem Druck.

Hier kommt indessen unzweifelhaft ein großer Teil der Lichtemission auf Rechnung der ruhenden Gasteilchen, was nach den Beobachtungen des Dopplereffektes beim Wasserstoff in weit geringerem Maße der Fall zu sein scheint.

Tabelle VIII.

Druck	Spannung	Skalenteile	Photometer- bank α	const. $\frac{1}{\alpha^2}$	Druck	Spannung	Skalenteile	Photometer- bank α	const. $\frac{1}{\alpha^2}$
0,030	10500	100	710	198	0,001	10700	280	875	130
0,028	11300	120	840	142	"	12000	320	860	135
0,024	12000	225	655	233	"	12000	300	890	126
0,027	12000	170	690	210	"	12300	440	750	178
0,027	12500	200	630	252	"	12500	266	1002	100
0,020	13000	210	662	229	0,0009	15700	550	665	226
0,025	15200	340	480	434	"	16000	500	900	124
0,022	15500	340	490	416	"	17400	340	880	129
0,022	16000	320	490	416	"	17400	600	665	226
0,022	16200	280	480	416	"	19400	340	890	126
0,021	16300	440	450	494	"	21000	380	920	119
0,024	17200	480	350	810	"	24500	550	680	216
0,024	17700	530	320	977	"	25800	420	800	124
0,028	18000	380	560	319					
0,022	18000	440	390	656					
0,022	19000	470	390	656					
0,021	19600	440	400	625					
0,019	26000	70	975	105					

III. Beobachtungen an positiven Strahlen des Quecksilbers.

Gegenüber den aus Gasen erzeugten Kanalstrahlen bieten die in Dämpfen erzeugten mancherlei Vorteile, insbesondere den, daß man nach Kondensation des Dampfes einen Raum herstellen kann, in den die positiven Strahlen eintreten und der so hoch evakuiert werden kann, wie es die modernen Hilfsmittel überhaupt gestatten. Ich habe deshalb einige vorläufige Beobachtungen am Quecksilberdampf angestellt.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 5. In ein schräg gestelltes, langes Glasrohr ist ein Eisenzylinder *K* geschoben, der an dem einen Ende ein doppeltes Drahtnetz mit zwei

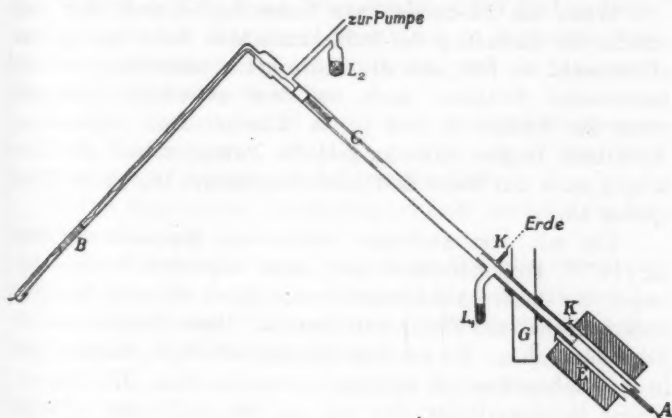


Fig. 5.

5 mm voneinander entfernten Drahtlagen aus Nickeldraht trägt. Am anderen Ende ist ein Diaphragma befestigt und bei *K* ist ein Stift eingeschraubt, der den Zylinder in seiner Lage hält und die Zuführung nach außen vermittelt. Die Anode *A* ist ein Eisenstift, der durch einen angelöteten Platin-draht eine Stromleitung nach außen erhält.

Über die eigentliche Entladungsröhre ist ein elektrischer Ofen *E* geschoben, durch den die Röhre gleichmäßig erhitzt werden kann. Die Röhre ist dann wasserdicht in das Gefäß *G* eingekittet, welches mit Eis gefüllt wird. Der sich aus dem

Quecksilber in der Röhre entwickelnde Dampf erfüllt den Teil, durch den die Entladung geht, gleichmäßig, während er sich in dem Gefäß *G* kondensiert und zurückfließt. Am Ende des Eisenzylinders ist an die Röhre das mit Kohle gefüllte Gefäß *L*₁ angesetzt. An dem anderen Ende der Röhre befindet sich ein zur Pumpe führender Ansatz, der ebenfalls ein mit Kohle gefülltes Gefäß *L*₂ trägt. In der Röhre ist ferner ein verschiebbarer Auffänger *C*, der aus einem 20 cm langen, hohlen Messingzylinder besteht, der durch ein Gegengewicht *B* am Heruntergleiten verhindert wird. Der Eisenzylinder kann durch eine über die Röhre geschobene, stromdurchflossene Spule beliebig verschoben werden.

Wenn die Elektroden von Gasen befreit sind, und man schickt die Entladung der Influenzmaschine durch den Quecksilberdampf, so füllt sich die Röhre bei höherer Spannung mit leuchtenden Strahlen, auch bei dem extremsten Vakuum, wenn die Gefäße *L*₁ und *L*₂ in flüssiger Luft eintauchen. Auch nach langem Erhitzen gibt die Pumpe, sobald die Entladung auch nur kurze Zeit hindurchgegangen ist, wieder Gas Spuren ab.

Ein mit dem Auffänger verbundenes Galvanometer von $2,8 \cdot 10^{-10}$ Empfindlichkeit gibt dann negativen Strom, der wegen der starken Ablenkbarkeit auch durch schwache Magnetfelder offenbar aus Elektronen besteht. Diese Elektronen sind Sekundärstrahlen, die aus dem Quecksilberdampf stammen und in ihm außerordentlich reichlich vorhanden sind. Ein dünner, offener Messingzylinder, den man an dem Auffänger befestigt und als Sonde in den Quecksilberdampf führt, gibt in der Entfernung 2 bis 4 cm vom Drahtnetz außerordentlich starke negative Ströme, welche zuweilen stärker sind als der ganze Entladungsstrom, während bei größerer oder geringerer Entfernung von der Kathode der negative Strom schwächer wird.

Aus dem aus dem Diaphragma austretenden Strahlenbündel kann man mit einem kleinen Elektromagneten ein Bündel negativer Strahlen ablenken, welche die Wand zur Fluoreszenz erregen. Ein großer Elektromagnet in einer Entfernung von 100 cm von der Kathode lenkt die negativen Strahlen vollständig ab. Wenn dann die Gasreste ausgepumpt sind, gibt das Galvanometer überhaupt keinen erkennbaren

Strom an, der jedenfalls kleiner ist als 10^{-10} Amp. Auf das leuchtende Bündel übt der Elektromagnet auch bei den stärksten Feldern keinen erkennbaren Einfluß aus.

IV. Schluß.

Wir können die Beobachtungen in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Die unter gleichen Bedingungen erzeugten positiven Strahlen des Wasserstoffs sind bei hohen Verdünnungen magnetisch weniger stark beeinflussbar wie bei niedrigeren.

2. Die Strahlen, welche durch ein Magnetfeld geschwächt sind, werden auch in ihrer Wärmewirkung und Lichtemission durch ein zweites Magnetfeld annähernd in demselben Verhältnis geschwächt wie solche Strahlen, auf die das erste Magnetfeld nicht eingewirkt hat.

3. Die Lichtemission ist unter sonst gleichen Bedingungen in hohen Verdünnungen erheblich geringer als in niedrigen und zwar sowohl bei Wasserstoff wie bei Luft.

4. Die magnetische Einwirkung ist nicht merklich von der Spannung abhängig.

5. Die Kanalstrahlen des Quecksilbers transportieren keine merkliche positive Ladung, und eine Ablenkung ist auch in starken, magnetischen Feldern durch direkte Beobachtung der Lichtemission nicht wahrzunehmen.

Diese Ergebnisse der vorliegenden Beobachtungen geben folgendes Bild:

Die positiven Atome streben wieder dem neutralen Zustande als dem stabilen Gleichgewichtszustande zu. Wenn also Veranlassung zur Neubildung fehlt, so werden sie sich sämtlich durch vorhandene Elektronen neutralisieren. Die Versuche in verschiedenen Verdünnungen zeigen nun, daß bei höheren Gasdrücken stärkere magnetische Beeinflussung eintritt, was darauf hinweist, daß hier mehr positiv geladene Atome vorhanden sind. Es sind daher wahrscheinlich die Zusammenstöße mit ruhenden Gasmolekeln, welche zur Bildung positiver Atome führen. In einer bestimmten Gasverdünnung stellt sich somit ein stationärer Zustand her, bei welchem ebenso viel positive Atome sich neu bilden wie sich neutralisieren. Die

im stationären Zustand vorhandene Anzahl positiver Ionen hängt von der Anzahl der sich in der Zeiteinheit bildenden und von der Geschwindigkeit der Neutralisation ab. In sehr hohen Verdünnungen ist die Zahl der Zusammenstöße gering, dann bilden sich nur wenige neue positive Ionen. Im Quecksilberdampf wird nun die Neutralisation der positiven Atome durch das erwähnte massenhafte Vorhandensein von Elektronen wesentlich begünstigt und hieraus erklärt es sich, daß überhaupt keine positiven Atome nachweisbar sind. Die Tatsache, daß die Quecksilberstrahlen trotzdem leuchten, macht es wahrscheinlich, daß das Leuchten im neutralen Zustande geschieht. Die Vermutung, daß die positiven Ionen im neutralen Zustande leuchten, ist von Hrn. Lenard bereits vor längerer Zeit ausgesprochen.¹⁾ Diese Annahme stimmt auch mit der Ansicht überein, daß das Leuchten bei Aufnahme eines negativen Elektrons erregt wird²⁾ und mit meinen Beobachtungen des Leuchtens der Wasserstoffkanalstrahlen im magnetischen Felde.³⁾

Auf eine nähere Diskussion der quantitativen Ergebnisse will ich zunächst nicht eingehen, da mir eine solche erst einer theoretischen Unterlage zu bedürfen scheint, die sich aus kinetischen Betrachtungen ergeben muß. Ich behalte mir dann vor, aus diesen Beobachtungen weitere Schlüsse zu ziehen.

Würzburg, Juli 1909.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 9. p. 649. 1902. Nach ihm sollen die neutralen Ionen die Hauptserie des Spektrums aussenden. Für den Wasserstoff wäre dann die Balmerische Serie als Hauptserie zu bezeichnen

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 23. p. 483. 1907.

3) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. p. 1089. 1908.

(Eingegangen 21. August 1909.)

**10. Über das wahrscheinliche Schmelzen
des Kohlenstoffs im selbsttönenden Lichtbogen
und im Funken¹⁾;
von M. La Rosa.**

(Aus dem Physikalischen Institut der Kgl. Universität zu Palermo.)

Die raschen Fortschritte auf dem Gebiete der niedrigen Temperaturen haben die Verflüssigung sämtlicher einst für *permanent* gehaltenen Gase ermöglicht. Sogar das Helium, welches die größten Schwierigkeiten bot, ist neuerdings bezwungen worden.

Eines gleich vollständigen Erfolges können wir uns noch nicht über die früher als *refraktär* betrachteten Körper rühmen; einige derselben sind in der Tat bis heute noch nicht geschmolzen worden. Zu diesen ist sicher der Kohlenstoff zu rechnen, und nach der vorherrschenden Ansicht scheinen auch das Bor, Molybdän, Wolfram dazu gezählt werden zu müssen.

Alte Versuche von Despretz²⁾ ließen eine Zeitlang annehmen, daß auch der Kohlenstoff der Macht der Wärme nachgegeben habe. Unter der gleichzeitigen Wirkung des Lichtbogens, des Knallgasgebläses und der durch eine große Stufenlinse konzentrierten Sonnenstrahlen wurde Erweichung des Kohlenstoffs und Bildung und Herabfließen kleiner Tröpfchen eines äußerst harten Körpers beobachtet, welcher den Rubin einritzte und deshalb für schwarzen Diamanten gehalten wurde.

Die glänzenden Untersuchungen Moissans³⁾ aber räumten mit diesem ersten Versuch vollständig auf.

Dieselben zeigten, daß reiner Kohlenstoff, der verhältnismäßig lange im elektrischen Ofen gehalten worden, niemals eine Spur von Schmelzen aufwies. Die verschiedenen Arten

1) Mitgeteilt auf dem VII. intern. Kongreß für angewandte Chemie, London 1909.

2) Despretz, *Compt. rend.* 28. p. 755. 1845.

3) H. Moissan, *Recherches sur les différentes variétés de carbone* Mém. III. — *Réproduction du diamant.* Ann. de chim. et phys. (7) 8. p. 466. 1896.

(Zucker-, Holz-, Retortenkohle usw.) verwandelten sich stets in Graphit, jedes Körnchen aber *bewahrte*, unter dem Mikroskop untersucht, *seine mehr oder weniger zackige Form und zeigte niemals eine Spur von Verlötung mit den umgebenden Körnchen.*

Die bereits von Despretz beschriebenen (und häufig von denjenigen, welche eine Zeitlang mit dem elektrischen Bogen gearbeitet haben, wahrgenommenen) Zeichen des Schmelzens treten infolge der in der Kohle enthaltenen Verunreinigungen auf. Wie Moissan nachgewiesen hat, bilden sich alsdann im elektrischen Bogen schmelzbare Kohlenstoffverbindungen, von denen einige (Silicid und Borid) eine ebenso große und sogar noch größere Härte als der durchsichtige Diamant besitzen.¹⁾

Moissan selbst jedoch glaubte, daß das Schmelzen des Kohlenstoffs, wenn zwar unmöglich bei gewöhnlichem Druck, doch unter Einwirkung höchsten Druckes erreicht werden könne. Der Ausgang seiner Untersuchungen über die künstliche Herstellung des Diamanten bestärkte ihn immer mehr in dieser seiner Meinung, welche ihm als Richtschnur gedient hatte.

Seine vollständige Anschauung über diese wichtige Frage findet sich zusammenfassend ausgesprochen in den Schlußfolgerungen, welche seine oben zitierte Abhandlung schließen:

... „le carbone peut être comparé à l'arsenic, que, dans le vide, comme à la pression ordinaire, il passe de l'état solide à l'état gazeux sans prendre la forme liquide“ ...

... „Nous estimons cependant que le carbone peut être amené, à l'état liquide, mais ce phénomène ne se produit que sous l'action de pressions très fortes“ ...

Diese Schlüsse sind allgemein angenommen worden und haben dahin geführt, daß der Kohlenstoff als ein bei gewöhnlichem Druck geradezu unschmelzbarer Körper betrachtet wird.²⁾ Offenbar aber enthalten dieselben mehr, als was sich aus den Versuchstatsachen ergibt.

Diese zeigen nur, daß der Kohlenstoff bei der Temperatur des elektrischen Bogens ohne zu schmelzen sublimiert. Man konnte demnach nur behaupten, daß der Kohlenstoff bei gewöhnlichem Druck keinen innerhalb der durch den elektrischen Ofen erreichten Temperaturgrenzen liegenden Schmelzpunkt be-

1) H. Moissan, l. c. p. 468.

2) Vgl. Landolt, Tabellen, 3. Aufl., p. 258.

sitzt. Nimmt man dann weiterhin an, daß bei den Versuchen bei hohem Druck der Kohlenstoff den flüssigen Zustand erreichte (was aus den Untersuchungen Moissans nicht notwendig hervorgeht¹⁾), so konnte man noch behaupten, daß er einer jener Körper ist, welche unter der Wirkung eines starken Druckes einen niedrigeren Schmelzpunkt annehmen.

Um schließen zu können, daß der Kohlenstoff sich wie der Arsenik verhält, d. h. daß er bei gewöhnlichem Druck nicht in den flüssigen Zustand übergehen kann, mußte noch bewiesen werden, daß er bei der Temperatur des elektrischen Ofens oder auch bei niedrigeren Temperaturen bereits eine über atmosphärendruckgroße Dampfspannung besitzt.

Ein derartiger Umstand aber ist niemals durch den Versuch sichergestellt worden; ja in Anbetracht der geringen Verbrauchsgeschwindigkeit der Kohlenelektroden im Lichtbogen wird man eher zu der Ansicht geführt, daß bis zu jener Temperatur diese Spannung erheblich kleiner ist als der atmosphärische Druck.

Wenn es so steht, läßt sich das Verhalten des Kohlenstoffs mit größerer Begründung dem des Jods an die Seite stellen. Wie bekannt, besitzt dieser Körper eine bedeutende Dampfspannung bei gewöhnlicher Temperatur, und ist deshalb imstande, zu sublimieren. Wenn es uns unsere Hilfsmittel nicht gestatteten, die Temperatur des Tripelpunktes (114°) zu erreichen, so würden wir das Jod nur in fester und gasförmiger Phase kennen. Sicher aber wäre der Schluß falsch, daß die flüssige Phase bei gewöhnlichem Druck niemals existieren kann, eben weil seine Dampfspannung bei den Temperaturen, die wir in diesem Moment als erreichbar annehmen, hinter dem Atmosphärendruck zurückbleibt. Eine einfache Temperatursteigerung kann, wie es in der Tat der Fall ist, Schmelzen bewirken.

Jedenfalls kann, auch wenn man den Wert der Dampfspannung des Kohlenstoffs bis zur Temperatur des elektrischen Ofens vollkommen unbestimmt lassen will, das Verhalten des

1) In der Tat kann man, wie von einigen beobachtet worden ist, annehmen, daß die von Moissan erhaltenen kristallisierten Teilchen von dem Kohlenstoff stammten, welcher in dem flüssigen Eisen bei hoher Temperatur in Lösung gegangen war. Die Untersuchungen von Hasslinger und Friedländer würden diese Anschauungsweise bestätigen.

Kohlenstoffs mit demselben Recht sowohl mit dem des Arseniks wie mit dem des Jods verglichen werden. Wir könnten demnach mit gleicher Wahrscheinlichkeit erwarten, daß der Kohlenstoff durch geeignete Temperatursteigerung und ohne Druck-erhöhung geschmolzen werden kann oder nicht. Die Frage nach der Schmelzbarkeit des Kohlenstoffs bei gewöhnlichem Druck bleibt demnach offen; dem Versuch allein kommt die Entscheidung zu.

Hierzu sind Hilfsmittel notwendig, welche höhere Temperaturen als die des elektrischen Ofens zu erreichen vermögen.

In dieser Hinsicht berechtigten mich meine Untersuchungen über die Umwandlung des Spektrums des selbsttönenden Lichtbogens¹⁾ wenn nicht zu der Überzeugung, so doch zu der Hoffnung, daß die durch den Bogen unter den Bedingungen, in denen er scharf das Funkenspektrum gibt, erreichte Temperatur höher sei als diejenige des kontinuierlichen Bogens und des elektrischen Ofens. Ich erwähne hier, daß unter diesen Bedingungen die auf der Bahn der Entladung aufgewendete mittlere spezifische Leistung bedeutend größer ist als diejenige, die man für den kontinuierlichen Bogen annehmen kann, auch wenn sie von größter Stromstärke ist. Ja unter einem gewissen Gesichtspunkt könnte man die Neigung Moissans zur Verwendung kolossaler Stromstärken in seinem elektrischen Ofen (bis zu 2200 Amp.) in Erörterung ziehen. In der Tat ist bekannt, daß der Grad der Lichterregung des Bogens mit dem Wachsen der Intensität abzunehmen strebt, und in meiner angeführten Arbeit habe ich hervorgehoben, daß die spezifische Leistung in paralleler Weise herabzugehen strebt. Man könnte demnach vielmehr an eine Abnahme als an eine Zunahme der Temperatur beim Wachsen der Stärke denken.²⁾

Derartige Betrachtungen bewogen mich, das Schmelzen des Kohlenstoffs mittels des selbsttönenden Lichtbogens zu versuchen.

Zu diesem Zweck verwendete ich die gewöhnliche Bogenlampe in Funkenmesserform mit vertikal angeordneten Kohlen.

1) M. La Rosa, *Ann. d. Phys.* 29. p. 249. 1909.

2) Nichtsdestoweniger ließen sich dadurch Vorteile erhalten, daß der Bogen abgeschlossen war, wodurch die Wärmeverluste annähernd konstant blieben, während die eingeführte Wärmemenge bedeutend wuchs.

Die untere drang in einen Tiegel aus refraktärer Materie durch ein in dessen Boden angebrachtes Loch, in das sie genau hineinpapte, ein; die obere ging durch ein gleiches Loch in dem Deckel. Dieser Tiegel war an einem mit Zahnstangengetriebe versehenen Stativ befestigt, durch das die Höhe desselben in bezug auf den Bogen mit Leichtigkeit reguliert werden konnte.

Der Betriebsstromkreis besaß eine Spannung von 300 Volt und es waren in ihn ein Rheostat zur Regulierung des Stromes zwischen 1 und 20 Amp. und ein Amperemeter eingeschaltet. Der Nebenkreis besaß eine Kapazität von 60 Mikrof. und ganz kleinen Widerstand und Selbstinduktion.

Nach Anfüllung des Tiegels mit aus kristallisiertem Zucker erhaltenem Kohlenstaub bis etwas über halbe Höhe, wurde seine Lage in bezug auf den Bogen derart reguliert, daß das Ende der unteren Elektrode zwei oder drei Millimeter unterhalb der Oberfläche der Kohlenstaubschicht verblieb. Darauf wurde der Bogen angezündet.

Wenn die über der unteren Elektrode liegende Kohlenstaubschicht keine größere Dicke als die oben angegebene besaß, so stellte sich der Oszillationsvorgang alsbald her. Als dann wurde der Staub heftig nach allen Richtungen umhergeschleudert und der von dem Bogen abgegebene Ton wurde stärker. Nach sorgfältiger Regulierung der Höhe des Tiegels aber gelang es, konstant auf der unteren Elektrode eine kleine Staubschicht zu erhalten (indem man ihn mit Hilfe zweckmäßiger leichter Schläge von der trichterförmig gewordenen freien Oberfläche zurückfallen ließ), welche die volle Entwicklung der Oszillationserscheinung nicht erheblich hinderte.

Nach einiger Zeit fanden sich auf den beiden intakt gebliebenen Elektroden (die Polarität konnte eine beliebige sein, doch verdiente die untere als positiver Pol den Vorzug) nach Form und Dimensionen voneinander abweichende Inkrustationen. Die der positiven Elektrode war breiter als hoch und besaß die äußere Form eines abgekappten mit der kleineren Basis auf der Elektrode aufruhenden Kegels. Die andere Basis war erheblich ausgehöhlt, so daß die Inkrustation, im ganzen betrachtet, das Aussehen eines Pokals hatte. Sie konnte eine Höhe von 6 mm oder mehr und einen größten Durchmesser

von 14 mm erreichen. Die der negativen Elektrode besaß eine längliche, nahezu zylindrische Form mit einem etwas kleineren Durchmesser als die der Elektrode (11 mm), zeigte auf der seitlichen Oberfläche kleine Anschwellungen und konnte eine Höhe von 10 mm erreichen. Auf ihrer Spitze war sie dünner und abgerundet.

Die Seitenfläche der beiden Inkrustationen war schwarz und man sah an ihr die Kohlenkörnchen anhaften. Dagegen waren die Endflächen, mit welchen der Bogen in Kontakt war, von nicht gleichmäßig grauer Farbe und zeigten breite Äderungen von einem bläueren Grau, waren außerdem fettig glänzend und schienen leicht glasiert.

Bei Zertrümmerung dieser Inkrustationen findet sich ein wenig resistenter, fast bröckeliger, peripherer Teil, welcher sich mit einer kleinen Anstrengung in ein Pulver reduzieren läßt, das unter dem Mikroskop die ursprünglichen ganz oder zum Teil in Graphit verwandelten Kohlekörnchen zeigt, und ein innerer Teil, welcher aus sehr kompaktem und den Zertrümmerungsbemühungen widerstehenden Graphit besteht. Derselbe ist sehr fettig und glänzend. Bei der Untersuchung unter dem Mikroskop lassen diese kleinen Graphitmassen keine Spur mehr von den Konturen und der Struktur der ursprünglichen Kohleteilchen unterscheiden. Zuweilen, wenn das Zurückfallen des Kohlenstaubes in den Bogen kein allmähliches war, war der Kern der unteren Inkrustation nicht gleichförmig, sondern zeigte mehrere abwechselnd bald bröckelige, bald kompakte Schichten.

Man konnte zunächst glauben, daß die Bildung der beschriebenen Inkrustationen abhängig sein könne von kleinen Mengen von Verunreinigungen in dem verwendeten Kohlenstaube und den Elektroden, ähnlich, wie oben bei den Versuchen von Despretz beobachtet wurde. Die schmelzbaren Verbindungen, die der Kohlenstoff mit Verunreinigungen eingeht, hätten in der Tat die Rolle des Kittes übernehmen und die umliegenden, bereits durch den Bogen in Graphit verwandelten Kohleteilchen zusammenschweißen können.

Ich bin deshalb zur quantitativen Bestimmung der Asche geschritten, die sowohl von der Zuckerkohle als von den verwendeten Elektroden und dem nach der Behandlung erhaltenen

Graphit zurückgelassen wurde. Folgendes waren die Resultate derselben:

Zuckerkohle	0,08 Proz.
Kohle der Elektroden ¹⁾	0,33 „
Erhaltener Graphit	0,05 „

Die bei dieser Bestimmung verbrannte Graphitmenge war gleich 1,290 g.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß dieser Graphit sich sehr resistent gegen die Verbrennung zeigte. Aus einem Vorversuch ergab sich, daß es nicht möglich war, die Verbrennung in den allgemein zu diesem Zweck verwendeten Glasröhren vorzunehmen, da bei der Temperatur, bei der der Graphit zu brennen begann, das Glas weich wurde und durchschmolz. Es war deshalb notwendig, von einer Porzellanröhre Gebrauch zu machen.

Der von dem Graphit hinterlassene Rückstand war also sehr klein, noch kleiner als der der verwendeten Zuckerkohle. Das Resultat dieser Analyse, die große Festigkeit der kleinen Massen und die unter dem Mikroskop beobachtete Kompaktheit veranlassen mich auszuschließen, daß die beschriebenen Inkrustationen aus in der bereits angegebenen Weise durch kleine Mengen fremder Materien zusammengekitteten Graphitteilchen resultieren könnten.

Man könnte sich auch noch denken, daß die Bildung dieser Inkrustationen auf Sublimation des Kohlenstoffs beruhte.

Bei einer derartigen Annahme hätte ihre größere oder geringere Entwicklung hauptsächlich von der Dauer des Phänomens abhängen müssen und nur in untergeordneter Weise von den sonstigen Begleitumständen. Bei direkter Beobachtung des Inneren des Tiegels aber durch einen kleinen Spalt habe ich beobachten können, daß während des Oszillationsphänomens der Bogen von einem kleinen Staubwirbel umgeben ist, welcher fortgesetzt den weißglühenden Staub zwischen den beiden Elektroden mit sich fortreißt, und daß die Inkrustationen sich in einer um so kürzeren Zeit bilden und leicht um so größere Dimensionen erreichen, je lebhafter der Wirbel und

1) Diese wurden ausdrücklich unter den reinsten, die ich mir verschaffen konnte, ausgewählt.

je geräuschvoller der Bogen ist. Überdies wird bei Wiederholung des Versuches unter identischen Bedingungen mit dem kontinuierlichen Bogen das vorhin beschriebene Resultat nicht erhalten, auch wenn die Dauer über mehrere Stunden hinausgezogen wird. Bei großer Verlängerung des Versuches, und wenn man den Kohlestaub von Zeit zu Zeit zwischen den Kohlen des Bogens zu komprimieren sucht, gelingt es Agglomerate zu erhalten, welche eine analoge äußere Form besitzen. Doch zeigen dieselben eine sehr geringe Kohäsion; unter der Einwirkung des schwachen, bei ihrem Fassen durch die Finger ausgeübten Druckes zerbrechen sie und zerfallen in ein Pulver, welches die nämlichen Eigenschaften besitzt wie das, welches von der äußeren Schicht der vorher beschriebenen Inkrustationen stammt.

Der Gesamtbefund dieser Beobachtungen führt uns demnach zur Annahme, daß die oben erwähnten Inkrustationen durch das sukzessive Ansammeln feinsten Kohletröpfchen entstehen, *d. h. daß die durch die intermittierende Entladung getroffenen Kohleteilchen den flüssigen Zustand erreichen und sich mit den Elektroden verschweißen, zwischen denen sie fortgesetzt hin und her gerissen werden.*

Daraus folgt, daß (in Übereinstimmung mit dem, was von mir aus anderen Gründen angenommen worden war) *die Temperatur des selbsttönenden Lichtbogens unter den Bedingungen, in denen derselbe das Funkenspektrum gibt, wirklich höher ist als die des gewöhnlichen Bogens und des elektrischen Ofens.*

Dies angenommen, hinderte nichts daran zu glauben, daß die Teilchen flüssigen Kohlenstoffs bei geeigneter Abkühlung in Form des Diamanten hätten kristallisieren können.

Doch ist, wie bekannt, der einzige bei hoher Temperatur stabile allotrope Zustand des Kohlenstoffs der des Graphits; der Diamant selbst quillt, in den elektrischen Bogen gebracht, auf und geht in Graphit über.

Wenn ich mich also vergewissern wollte, ob es möglich wäre, Diamantteilchen zu erhalten, war es notwendig, in einer Weise zu verfahren, daß die durch die Entladung getroffenen und geschmolzenen Kohlenstoffteilchen rasch und definitiv zu niedriger Temperatur zurückkehren konnten.

Einer solchen Bedingung war bei den oben beschriebenen

Versuchen nicht zu genügen. Der ganze die Elektroden umgebende Kohlestaub blieb konstant in Weißglut, und wenn demnach nach der Verflüssigung sich Diamantteilchen zu bilden strebten, so mußten dieselben sich sofort in Graphit umwandeln.

Um die Kohlenmasse bei niedriger Temperatur zu halten, habe ich verschiedene Versuche gemacht; zuletzt aber habe ich zur Verwendung eines stark kondensierten Funkens gegriffen. Die durch die Entladung in der Masseneinheit aufgewendete mittlere Leistung ist in diesem Fall¹⁾ von derselben Größenordnung und vielleicht noch größer als die des vorher verwendeten Bogens. Da aber die Energiemenge einer jeden Entladung kleiner und die Entladungen selbst bedeutend weniger frequent waren, so betrug die Temperatur der ganzen der elektrischen Behandlung unterworfenen Kohlenmasse stets nur wenig mehr als die Temperatur der Umgebung.

Unter diesen Bedingungen konnten die wenigen durch die Entladung getroffenen Teilchen stets die zum Schmelzen nötige hohe Temperatur erreichen, kehrten aber in kürzester Zeit definitiv zur gewöhnlichen Temperatur zurück.

Der benutzte Funke wurde durch die Entladung einer Batterie von 72 großen nebeneinander geschalteten Leidener Flaschen geliefert. Die Kapazität einer jeden, auf Grund ihrer Dimensionen berechnet, betrug etwas mehr als 500 cm. Die Batterie wurde mit Hilfe eines Klingelfusssschen Induktatoriums von 80 cm Funkenlänge geladen, das mittels Wehneltschen Interruptors durch einen mittleren Strom von ca. 40 Amp. erregt wurde.

Die Kohlenmasse, welche eine Zeitlang unter der Einwirkung der Funken geblieben war, wurde zunächst in Bromoform (Dichte 2,9) suspendiert. Auf diese Weise wurden von ihr wenige schwerere Teilchen getrennt, welche nach Isolierung und Auswaschung mit Alkohol und Äther ziemlich lange in konzentrierter Schwefelsäure und dann in Königswasser gekocht wurden.

Nach tüchtigem Auswaschen mit destilliertem Wasser, Alkohol und Äther wurden sie in einem Platinschälchen ge-

1) Vgl. M. La Rosa, l. c.

sammelt und einige Zeit in Fluorwasserstoffsäure gekocht. Bei diesen Behandlungen wurde eine ziemliche Portion der gesammelten Teilchen vernichtet, ein Teil ging unvermeidlich durch die zahlreichen Auswaschungen und die darauffolgenden Trennungen verloren, nur ganz wenige verblieben noch in der Schale.

An diesen wenigen übrig gebliebenen Teilchen wurde die Dichteprobe mit Bromoform wiederholt (wodurch ich von weiteren Behandlungen, speziell mit Salpetersäure und Kaliumchlorat, zur Zerstörung des Graphits dispensiert wurde) und schließlich wurden nur die gesammelt, welche auf den Grund der Flüssigkeit fielen.

Diese sind meistens von grauer Farbe in verschiedenen Abtönungen und besitzen eine mehr oder weniger abgerundete Form, darunter befinden sich weiße und durchsichtige, einige deutlich kristallisiert, durchsichtig und äußerst lichtbrechend.

Die durchsichtigen fallen auch in Methylenjodid zu Boden, besitzen demnach eine größere Dichte als 3,2.

Von zwei der schönsten erhaltenen Teilchen füge ich die Mikrophotographien bei; eines derselben (Fig. 1) bildet einen

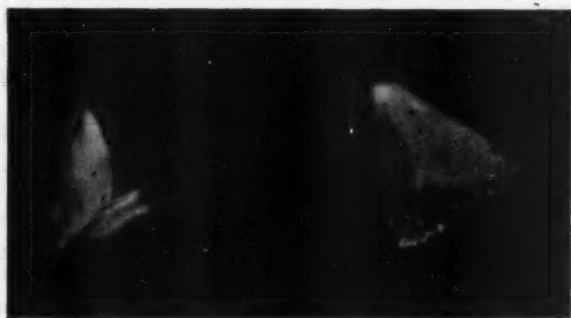


Fig. 1.

einzigsten Kristall und erscheint in aus 2 Tetraedern kombinierter Form mit gekrümmten Flächen; das andere (Fig. 2) zeigt sich als ein Aggregat von mehreren mehr oder weniger unvollständigen Kristallen; diejenigen, welche man am besten sieht, bilden zwei Tetraeder und zwei kleine Pyramiden mit quadratförmiger

Basis. Einige andere zeigen sich als ein Aggregat von vielen winzigen Kriställchen, deren Form herauszufinden kaum gelingt.



Fig. 2.

Ich habe auch Härteproben anstellen können und dabei festgestellt, daß die beschriebenen Teilchen scharf den Rubin ritzen.

Nur zwei Körper besitzen meines Wissens die oben angeführten physikalischen und chemischen Eigenschaften: Diamant und Karborundum. Ersterer kristallisiert im Würfelsystem, letzteres, welches ein Kohlenstoffsilicid ist, kristallisiert im System des hexagonalen Prismas. Zwei Wege lassen sich also zur Unterscheidung der beiden Körper voneinander einschlagen: die genaue Bestimmung ihrer chemischen Zusammensetzung oder des Kristallsystems, dem sie angehören. Was die erste Untersuchung anbetrifft, so habe ich bisher kein für eine quantitative Verbrennung ausreichendes Gewicht an Teilchen sammeln können.

Ich kann jedoch ein gutes Argument zur Entkräftung der Vermutung, die beschriebenen Teilchen möchten aus Karborundum bestehen, anführen.

In den letzten Tagen habe ich auf den Rat von Hrn. Prof. Peratoner die Versuche wiederholt und dabei gesucht, die Anwesenheit von Kieselerde fast vollständig auszuschließen. Ich habe deshalb Elektroden aus Platin verwendet, die in eine Hülle, ebenfalls aus Platin, eingeschlossen waren. Die Isolierung geschah mittels Kautschuk und an Punkten, die von der Stelle, an der die Entladung erfolgte, genügend entfernt waren, so daß man sicher sein konnte, daß dieser Körper durch dieselbe nicht einmal gestreift würde. Die verwendete Zucker-

kohle hatte einen ganz geringen Rückstand und der Liebenswürdigkeit eben des Hrn. Prof. Peratoner verdanke ich die Analyse, deren Resultat ich hier anführe.

Bestimmung der Asche:

1. aus 10 g Kohle 0,0049 g Asche
2. „ 10 g „ 0,0048 g „

Zusammensetzung der Asche: Der Rückstand von 28 g Kohle wurde sechsmal im Wasserbad mit konzentrierter HCl eingedampft und jedesmal eine Stunde trocken weiter erhitzt, um die Kieselerde unlöslich zu machen. Der Rückstand löste sich fast ganz in verdünnter HCl und hinterließ nur einige kaum wahrnehmbare, nicht wägbare Flöckchen. Die Salzsäurelösung gab die Reaktionen des Fe und des Ca. Es fanden sich keine bestimmbareren Spuren von Kieselerde.

Wenn man bedenkt, daß die der elektrischen Behandlung unterworfenen Zuckerkohle keine 5 g betrug und daß die durch die Entladung getroffene und umgewandelte sicher nur einen ganz kleinen Bruchteil von einem Gramm ausmachte, kann man sich einen Begriff von der äußersten Geringfügigkeit der hypothetischen Kieselerdespuren machen, welche durch die Entladung eine Verbindung mit dem Kohlenstoff hätten eingehen können. Die Resultate dieser Versuche waren im wesentlichen die gleichen wie bei den früheren Versuchen. Was die zweite Untersuchung anbelangt, so habe ich in den letzten Tagen feststellen können, daß der durch Fig. 1 dargestellte Kristall durchaus keine Spur von Doppelbrechung zeigt. Er gehört also in das Würfelsystem.

Die wahrscheinlichste Mutmaßung, die man über die Natur der beschriebenen Teilchen aufstellen dürfte, bleibt demnach die, daß sie aus Diamant bestehen. Nichtsdestoweniger behalte ich mir noch das endgültige Urteil vor in der Hoffnung, daß es mir bald gelingen möge, das letzte Beweiselement der Verbrennung zu gewinnen.

Den Herren Professoren Macaluso und Peratoner und meinem Freunde Dr. Palazzo spreche ich für die lebenswürdige Unterstützung und Ratschläge meinen aufrichtigsten Dank aus.

(Eingegangen 24. Juli 1909.)

**11. Über den Zusammenhang
zwischen der gewöhnlichen und der kanonischen
Form der Zustandsgleichung;
von A. Wassmuth.**

In einer fundamentalen, im Juni 1908 erschienenen Arbeit¹⁾ hat Hr. Planck die Gleichungen besprochen, welche den Zustand eines Körpers darstellen. Er weist darauf hin, daß jene Gleichungen — er nennt sie die *kanonischen* —, welche die Entropie S als Funktion der Energie E und des Volumens V wiedergeben, einen prinzipiellen Vorzug vor den gewöhnlichen Formen, in denen der Druck p als gegebene Funktion der Temperatur T und des Volumens V auftritt, haben. Ganz abgesehen davon, daß aus den letzteren Formen die spezifischen Wärmen eindeutig *nicht* zu ermitteln sind, ließen sich p und T für eine Schar von Molekeln nur definieren durch Mittelwerte, und zwar p durch den Mittelwert der Bewegungsgrößen, T durch den Mittelwert der kinetischen Energie der Molekeln, während hingegen V und E für jeden beliebig herausgegriffenen Teil der ganzen Molekelschar bestimmte Werte besitzen.

An der Hand der von Boltzmann aufgestellten grundlegenden Beziehung:

$$S = k \log W + \text{const.},$$

wobei k eine *universelle* Konstante und W die Wahrscheinlichkeit des Zustandes darstellt, läßt sich die Entropie S in der kanonischen Form unter gewissen Annahmen ableiten, wobei man keinerlei Voraussetzung über das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle und über die kinetische Bedeutung der Temperatur von vornherein einzuführen braucht.

1) M. Planck, Über die Zustandsgleichung einatomiger Gase, Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. 1908. p. 633—647.

Ist S als Funktion von E und V , also in der kanonischen Form gegeben, so muß:

$$(1) \quad \frac{\partial S}{\partial E_V} = \frac{1}{T} = f_1(E, V),$$

$$(2) \quad \frac{\partial S}{\partial V_E} = \frac{p}{T} = f_2(E, V)$$

sein, woraus durch Elimination von E die gewöhnliche Form, d. i.

$$(3) \quad p = F(T, V)$$

erhalten wird. Diesen Weg hat Planck zuerst¹⁾ für die Ableitung der Zustandsgleichung idealer, einatomiger Gase eingeschlagen und ist dabei auf die Gesetze von Boyle, Gay-Lussac und Avogadro gestoßen. In der oben erwähnten Arbeit hat Hr. Planck die angedeutete Methode auch auf beliebige einatomige Gase angewandt und gelangte so zu einer Formel, die mit der bekannten Zustandsgleichung von van der Waals große Ähnlichkeit hat und mit derselben für größere Werte des Volumens übereinstimmt. Als weiteres Ziel der begonnenen Untersuchung wird die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit W für *verschiedene Annahmen* bezüglich der Wechselwirkungen der Atome hingestellt.

Dagegen soll nun im folgenden die Frage erörtert werden, welche Annahmen man etwa *noch* machen kann, um von einer gegebenen, gewöhnlichen Zustandsgleichung (3) zur kanonischen Form

$$S = f(E, V)$$

zu gelangen. Ist nämlich Gleichung (3) durch Elimination von E aus (1) und (2) hervorgegangen, so erhellt, daß man zu (3) noch eine Beziehung dazugeben müsse, um wieder die kanonische Zustandsgleichung zu erhalten. Diese Untersuchung geschieht in der Absicht, um solche *Anhaltspunkte* für eine mögliche Berechnung von W zu gewinnen, daß man wieder auf (3) stößt.

Es sei eine gewöhnliche Zustandsgleichung in der Form

$$p = F(T, V)$$

1) M. Planck, Vorlesungen über Wärmestrahlung p. 162.

gegeben und durch c_v die spezifische Wärme der ganzen Masse bei konstantem Volumen dargestellt, dann gelten die Gleichungen:

$$(4) \quad dE = \frac{\partial E}{\partial T_v} dT + \frac{\partial E}{\partial V_T} dV = c_v dT + T^2 \frac{\partial \left(\frac{p}{T} \right)}{\partial T_v} dV,$$

$$(5) \quad dS = \frac{\partial S}{\partial T_v} dT + \frac{\partial S}{\partial V_T} dV = c_v \frac{dT}{T} + \frac{\partial p}{\partial T_v} dV.$$

Wir wollen nun annehmen — Annahme A — es sei auch c_v als Funktion von T und V gegeben, dann läßt sich nach (4) im allgemeinen die Energie E als eine Funktion von T und V und hieraus durch Umkehrung T als Funktion von E und V ermitteln. Diese in (5) eingesetzt und integriert liefert dann die Entropie S als Funktion von E und V , d. i. die kanonische Form.

Spezialfall I. Es sei

$$(6) \quad \frac{\partial c_v}{\partial V_T} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T_v^2} = 0,$$

d. i. c_v nur eine Funktion von T , also unabhängig von V , dann folgt als gewöhnliche Zustandsgleichung:

$$p = T \cdot \varphi(V) + \psi(V),$$

wo $\varphi(V)$ und $\psi(V)$ stetige Funktionen von V darstellen.

Zu dieser Form gehören die meisten der vorhandenen Zustandsgleichungen; so z. B. ist nach:

van der Waals:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

Planck:

$$p = -\frac{kT}{\beta} \log \left(1 - \frac{\beta}{v} \right) - \frac{a}{v^2},$$

Kamerlingh-Onnes:

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) \cdot v \cdot \psi(b, v) = RT,$$

wo ψ eine nach Potenzen von b/v zerlegbare Funktion vorstellt.

Amagat:

$$p(v-a) = \varphi(v) \left[T - \frac{M(v-a)}{v^m + a v^{m-1}} \right],$$

Tait:

$$p(v - \beta) = RT - \frac{A}{v - \gamma} + \frac{E}{v - \alpha},$$

Sutherland:

$$pv = RT \frac{1 + \frac{x}{2}}{v - \frac{x}{2}} - \frac{b}{v},$$

van der Waals und H. A. Lorentz:

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v} \left[1 + \frac{b}{v} + \alpha_1 \frac{b^2}{v^2} + \alpha_2 \frac{b^3}{v^3} \right],$$

Boltzmann und Mache:

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) \left[v - b + \frac{c}{v^2 + d} \right] = RT,$$

Rose Innes und Young:

$$pv = RT \left[1 + \frac{c}{v + z - g v^{-2}} \right] - \frac{l}{v + z}. \quad 1)$$

Nennen wir

$$\int c_v dT = L = \text{Funktion}(T),$$

so wird nach (4)

$$E = \int c_v dT - \int \psi(V) dV = L - \psi_1(V) = \text{aktuelle} + \text{potentielle} \\ \text{Energie},$$

wenn wir

$$\int \psi(V) dV = \psi_1(V)$$

setzen; ferner geht wegen

$$c_v dT = dL$$

die Gleichung (5) über in

$$dS = \frac{dL}{T} + \varphi(V) dV.$$

Folgt aus $L = \int c_v dT$ durch Umkehrung

$$T = H(L),$$

so wird (5)

$$dS = \frac{dL}{H(L)} + \varphi(V) dV.$$

1) O. D. Chwolson, Physik 3. p. 811.

Nennt man noch

$$\int \frac{dL}{H(L)} = G(L)$$

und analog wie früher

$$\int \varphi(V) dV = \varphi_1(V),$$

so ergibt sich schließlich die *kanonische* Form:

$$S = G(L) + \varphi_1(V).$$

Die Form der Abhängigkeit des c_v von T bleibt unbestimmt; es ist eben nur der Differentialquotient des c_v nach V , nicht aber auch der nach T bekannt. Man überzeugt sich leicht, daß

$$S = G(L) + \varphi_1(V)$$

wegen $L = E + \psi_1(V)$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

Es sind also zu bilden:

$$L = \int c_v dT = \text{Funktion}(T),$$

hieraus

$$T = H(L), \quad G(L) = \int \frac{dL}{H(L)}$$

und aus der Zustandsgleichung

$$\varphi_1(V) = \int \varphi(V) dV, \quad \psi_1(V) = \int \psi(V) dV, \quad E = L - \psi_1(V)$$

und schließlich

$$S = G(L) + \varphi_1(V).$$

Es sei z. B.

$$c_v = \alpha_0 + \alpha_1 T,$$

wo α_0 und α_1 von V unabhängig sind und α_1 sehr klein gegen α_0 ist; dann wird:

$$L = E + \psi_1(V) = \int c_v dT = \alpha_0 T + \frac{1}{2} \alpha_1 T^2;$$

diese Gleichung hat nur eine mit L zugleich unendlich klein werdende Wurzel T , welche durch eine nach ganzen positiven Potenzen von L fortschreitende Reihe, von der

$$T = b_1 L + b_2 L^2 + \dots,$$

wobei natürlich $b_1 = 1/\alpha_0$ ist, dargestellt wird.

Diese Gleichung gibt aufgelöst:

$$T = \frac{1}{\alpha_1} \left[-\alpha_0 \pm \alpha_0 \left(1 + \frac{2\alpha_1}{\alpha_0^2} L \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{\alpha_0} L - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0^3} L^2,$$

wenn wir die Reihe bei diesem Gliede abbrechen und nur die positive Wurzel berücksichtigen. Übrigens ist:

$$dL = (\alpha_0 + \alpha_1 T) dT.$$

Hiermit findet man strenge:

$$S = \alpha_0 \log T + \alpha_1 T + \varphi_1(V),$$

wo nahe:

$$T = \frac{1}{\alpha_0} L - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2} L^2$$

und stets

$$L = E + \psi_1(V)$$

ist. Für $\alpha_1 = 0$ wird $c_v = \alpha_0 = \text{const.}$, und es ergibt sich die einfache Form:

$$L = \alpha_0 T, \quad H(L) = \frac{1}{\alpha_0} L; \quad G(L) = \alpha_0 \int \frac{dL}{L} = \alpha_0 \log L.$$

oder

$$S = \alpha_0 \log L + \varphi_1(V),$$

wobei

$$L = E + \psi_1(V)$$

ist.

Setzen wir:

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} k N, \quad \varphi(V) = -\frac{k}{\beta} \log \left(1 - \frac{\beta N}{V}\right),$$

$$\psi(V) = \frac{a}{V^2}, \quad \psi_1(V) = -\frac{a}{V},$$

$$E = L - \psi_1(V), \quad L = E + \psi_1(V) = E - \frac{a}{V}$$

und

$$\varphi_1(V) = k N \log V - \frac{a V}{\beta} \left(1 - \frac{\beta N}{V}\right) \log \left(1 - \frac{\beta N}{V}\right),$$

wo N die Anzahl der Moleküle, β und k Konstanten vorstellen, so stoßen wir auf die von Planck gegebene Form:

$$S = \frac{3}{2} k N \log [E + \psi_1(V)] + \varphi_1(V);$$

das Gesamtpotential der Atome aufeinander ist:

$$- \psi_1(V) = + \frac{a}{V};$$

den gleichen Wert wie Planck für $\psi(V) = a/V^2$ haben die Formeln von: van der Waals, Kamerlingh-Onnes, Sutherland, Boltzmann u. a.

Hingegen ist nach Amagat:

$$\psi(V) = - \frac{f(V)}{V^m + \alpha V^{m-1}},$$

nach Tait:

$$\psi(V) = - \frac{A}{(v-\beta)(r-\gamma)} + \frac{E}{(v-\alpha)(v-\beta)},$$

nach Innes und Young:

$$\psi(V) = - \frac{l}{v(v+x)}.$$

Bei der Ableitung der oben angegebenen Funktionen $\varphi(V)$ macht Planck die Grundannahme, daß in einem Raume, in dem bereits Atome vorhanden sind, der Spielraum für die hinzutretenden Atome kleiner wird. Man erhält etwas andere Werte für $\varphi(V)$, wenn man nach Boltzmann (Gasttheorie II. p. 171. 1898) die Entwicklung weiter führt.

Höchst auffallend ist das Auftreten eines Gliedes $\alpha_1 T$ in der Formel:

$$S = \alpha_0 \log T + \alpha_1 T + \varphi_1(V),$$

wenn eben α_1 nicht Null ist. Daß dies möglich ist, ergibt sich aus einer Untersuchung Fliegner's¹⁾, der zufolge selbst für ideale Gase $c_v = \alpha_0 + \alpha_1 T$ zu schreiben ist. — Die Erklärung des Auftretens von $\alpha_1 T$ in S hängt mit der *intramolekularen* Bewegung zusammen. Setzen wir nämlich ganz allgemein $c_v = \alpha_0(1 + \beta)$, wo α_0 eine Konstante und β eine Funktion von T von der Form:

$$\beta = c_1 T + c_2 T^2 + \dots$$

ist, so wird:

$$dL = c_v dT = \alpha_0(1 + \beta) dT,$$

$$S = \int \frac{c_v dT}{T} + \varphi_1(V) = \alpha_0 \log T + \alpha_0 \int \beta \frac{dT}{T} + \varphi_1(V)$$

und

$$\begin{aligned} L = E + \psi_1(V) &= \int c_v dT = \alpha_0 \int \beta dT + \alpha_0 T \\ &= \alpha_0 T + \alpha_0 c_1 \frac{T^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Diese Gleichung nach T aufgelöst, hat nur *eine* mit L zugleich unendlich klein werdende Wurzel T , welche durch eine nach

1) A. Fliegner, Beibl. 33. p. 17. 1909.

ganzen positiven Potenzen von L fortschreitende Reihe von der Form

$$T = b_1 L + b_2 L^2 + \dots$$

dargestellt wird, wobei natürlich $b_1 = 1/\alpha_0$ ist. (Nimmt man

$$c_2 = c_3 = \dots = 0 \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

so kommt

$$S = \alpha_0 \log T + \alpha_1 T + \varphi_1(v),$$

weil

$$\beta = c_1 T = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} T$$

ist.)

Wird eine *intramolekulare* Bewegung angenommen, und bezeichnet man nach Boltzmann mit dQ_3 die für diese Bewegung zuzuführende Wärme, und mit dQ_2 die der progressiven Bewegung (der Schwerpunkte der Moleküle) entsprechende Wärme, so ist $\beta = dQ_3/dQ_2$ oder

$$\beta = \frac{\text{Änderung der mittleren lebendigen Kraft und Kraftfunktion der intramolekularen Bewegung}}{\text{Änderung der lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung aller Moleküle}}$$

und es ist β eine Funktion von $T^1)$, indem bei einer Ausdehnung der Gase ohne Temperaturänderung die Moleküle bloß weiter auseinanderrücken, ohne anderwertige Modifikation dieser Bewegung. Fehlt diese Bewegung, so ist

$$\beta = 0, \quad S = \alpha \log T + \varphi_1(F);$$

ist diese Bewegung sehr klein, $\beta = (\alpha_1/\alpha_0)T$, so tritt in S das Glied $\alpha_1 T$ hinzu.

Es ist

$$dQ_3 = dQ_5 + dQ_6,$$

wo sich dQ_5 auf die intramolekulare lebendige Kraft und dQ_6 auf die innere Kraftfunktion bezieht. Nach Maxwell-Boltzmann kann man auch für zusammengesetzte Moleküle

$$dQ_5 = \left(\frac{\mu}{3} - 1\right) dQ_2$$

und

$$dQ_6 = \varepsilon \cdot dQ_2$$

1) Boltzmann-Nabel, Enzyklopädie V. 1. p. 542.

setzen, wo μ die Zahl der Freiheitsgrade (Zahl der die Moleküle bestimmenden μ generellen Koordinaten) und ϵ einen Faktor vorstellt, der vom Kraftgesetz abhängt und nur in einzelnen Fällen verschwindet. Es wird

$$\beta = \frac{\mu}{3} - 1 + \epsilon.$$

Sind die Moleküle *starre*, ausgedehnte Körper, so ist $\epsilon = 0$. Sind dieselben vollkommene Kugeln, so ist $\mu = 3$ und $\beta = 0$. Sind die Moleküle starre Rotationskörper, deren Gestalt von der Kugelgestalt verschieden ist, so wird $\mu = 5$ und $\beta = \frac{2}{3}$. Sind es aber anders gestaltete, starre Körper, so wird $\mu = 6$ und $\beta = 1$. In den übrigen Fällen (vielleicht auch in den betrachteten für sehr hohe Temperaturen) tritt aber eine Veränderlichkeit von β mit der Temperatur ein.

In den angeführten Fällen ist also β von der Temperatur unabhängig, wenn auch konstant, und es verschwindet in S das lineare Glied $\alpha_1 T$.¹⁾

Spezialfall II. Es werde ferner angenommen, daß

$$(1) \quad \frac{\partial c_v}{\partial v T} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = \varphi(V) \cdot \vartheta(T)$$

sei, daß also die Änderung der spezifischen Wärme mit dem Volumen bei konstanter Temperatur T als Produkt von zwei Funktionen erscheint, deren eine nur das Volumen V , die andere nur die Temperatur T enthält.

Setzen wir wieder:

$$\int \varphi(V) dV = \varphi_1(V), \quad \int \frac{\vartheta(T) dT}{T} = \xi(T) \quad \text{und} \quad \int \xi(T) dT = \xi_1(T),$$

so wird

$$(2) \quad c_v = \varphi_1(V) \cdot \vartheta(T) + \eta(T)$$

und

$$(3) \quad p = \varphi(V) \cdot \xi_1(T) + \psi(V) \cdot T + \chi(V),$$

wobei die Bedeutung der neu eingeführten Funktionen $\eta(T)$, $\psi(V)$ und $\chi(V)$ ohne weiteres klar ist.

1) L. Boltzmann, Gastheorie II. p. 127; Enzyklopädie I. c. p. 547 u. 548.

Zu dieser Gruppe gehört z. B. die von Clausius gegebene Zustandsgleichung:

$$p = -\frac{C}{T(V+b)^2} + \frac{R \cdot T}{V-a}.$$

Es wird:

$$\varphi(V) = -\frac{C}{(V+b)^2}, \quad \xi_1(T) = \frac{1}{T}, \quad \xi(T) = \frac{\partial \xi_1(T)}{\partial T} = -\frac{1}{T^2},$$

$$\frac{\vartheta(T)}{T} = \frac{\partial \xi}{\partial T} = \frac{2}{T^3}, \quad \vartheta(T) = \frac{2}{T^2},$$

$$\varphi_1(V) = \int \varphi(V) dV = -c \int \frac{dV}{(V+b)^2} = \frac{c}{V+b}$$

und

$$c_v = \frac{2c}{T^2(V+b)} + \eta(T).$$

Auch die von Happel aufgestellte, sehr allgemeine Form:

$$p = -\frac{1}{V^2} f(T) + T \psi(V)$$

gehört hierher.

Für die obige Annahme:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v_T} = \varphi(V) \cdot \vartheta(T)$$

wird nun allgemein:

$$dE = c_v dT + T^2 \times \frac{\partial \left(\frac{p}{T} \right)}{\partial T_v} dV = c_v dT + [T \cdot \xi(T) - \xi_1(T)] \cdot \varphi(V) dV - \chi(V) dV,$$

welcher Ausdruck ein vollständiges Differentiale darstellt.

Es muß:

$$E = \int c_v dT + \int dV [T \xi(T) - \xi_1(T)] \varphi(V) - \chi(V) - \int \frac{\partial c_v}{\partial v_T} dT,$$

oder wegen (2):

$$E = \varphi_1(V) \cdot \vartheta_1(T) + \eta_1(T) + \int \varphi(V) dV [T \xi(T) - \xi_1(T) - \vartheta_1(T)] - \chi_1(V),$$

oder¹⁾

$$\begin{aligned} E &= \eta_1(T) + \varphi_1(V) [T \cdot \xi(T) - \xi_1(T)] - \chi_1(V) \\ &= \eta_1(T) + \varphi_1(V) \cdot \vartheta_1(T) + C \cdot \varphi_1(V) - \chi_1(V), \\ (4) \quad E &= C \cdot \varphi_1(V) - \chi_1(V) + \eta_1(T) + \varphi_1(V) \cdot \vartheta_1(T) \end{aligned}$$

1) Man sieht, daß der Ausdruck: $T \cdot \xi(T) - \xi_1(T) - \vartheta_1(T)$, nach T differenziert, Null gibt, d. h. von T unabhängig, also eine konstante Zahl C ist; es wird daher: $T \cdot \xi(T) - \xi_1(T) = C + \vartheta_1(T)$.

sein. Aus dieser Gleichung wäre also T als Funktion von E und V zu ermitteln.

Für die Entropie S erhalten wir, wegen

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + \frac{\partial p}{\partial T_v} dV,$$

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{c_v dT}{T} + \int dV \left[\frac{\partial p}{\partial T_v} - \int \frac{\partial T}{T} \cdot \frac{\partial c_v}{\partial V_T} \right] \\ &= \int \frac{c_v dT}{T} + \int dV \left[\varphi(V) \cdot \xi(T) + \psi(V) - \varphi(V) \int \frac{\vartheta(T)}{T} dT \right], \end{aligned}$$

d. i.

$$(5) \quad S = \int \frac{c_v dT}{T} + \psi_1(V) = \varphi_1(V) \cdot \xi(T) + \int \frac{\eta(T)}{T} dT + \psi_1(V).$$

Sieht man T als Mittelfunktion von E und V an, so überzeugt man sich leicht, daß aus (5) folgt:

$$\frac{\partial S}{\partial E_V} = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial V_E} = \frac{p}{T},$$

wie es sein soll.

Im Falle der Gleichung von Clausius wird:

$$\xi = -\frac{1}{T^2}, \quad \xi_1 = \frac{1}{T}, \quad \vartheta = \frac{2}{T^2}, \quad \vartheta_1 = -\frac{2}{T}, \quad \chi = \varnothing,$$

$$\psi = \frac{R}{V-a}, \quad \psi_1 = R \log(V-a), \quad \varphi = -\frac{C}{(V+b)^2},$$

$$\varphi_1 = \frac{C}{V+b}, \quad C = \varnothing$$

und:

$$(4') \quad E = \eta_1(T) - \frac{2c}{T(v+b)} = \text{aktuelle} + \text{potentielle Energie.}$$

$$(5') \quad S = -\frac{c}{T^2(V+b)} + \int \frac{\eta(T)}{T} dT + R \log(V-a).$$

Aus (4') sieht man, daß die potentielle Energie auch von der Temperatur abhängt und derselben verkehrt proportional ist¹⁾, während die aktuelle Energie die unbestimmte Funktion $\eta_1(T)$ der Temperatur enthält.

1) Man vgl. z. B. J. P. Kuenen, Zustandsgleichung (Die Wissenschaft, Heft 20) p. 103 ff.; M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift p. 626.

Kann man $\eta(T) = \alpha =$ einer Konstanten setzen, so wäre:

$$c_v = \alpha + \frac{2c}{T^2(V+b)},$$

$$E = \alpha T - \frac{2c}{T(V+b)} = c_v T + 2 \times \text{pot. Energie} = (2\alpha - c_v)T.$$

Ist allgemein: $\chi(V) = 0$, die Gleichung:

$$p = \varphi(V) \cdot \zeta_1(T) + \psi(V)T$$

ähnlich der von Happel, so sollte auch hier:

$$\left[p - \frac{\varphi(V)}{\varphi'(V)} \frac{\partial p}{\partial V} \right] \cdot \frac{1}{T} = \text{funkt. } V = \frac{p_n}{T_n}$$

sein. Diese Relation ist aber nach Happel (Kuenen, l. c. p. 170) nicht erfüllt.

(Eingegangen 26. Juli 1909.)

**12. Über die innere Reibung
einiger Gase und Gasgemische bei verschiedenen
Temperaturen;
von Karl Schmitt.**

(Nach Untersuchungen aus dem Physikalischen Institut der
Universität Halle.)

Da die Kenntnis des Reibungskoeffizienten für die Molekuldynamik der Gase von Wichtigkeit ist, sind im Laufe der Zeit im Physikalischen Institute der Universität Halle auf Anregung des Hrn. Geh. Regierungsrates Prof. Dr. Dorn mehrere Untersuchungen über Reibung von Gasen und Gasgemischen nach der Transpirationsmethode angestellt worden¹⁾, wobei die Gase in möglichst reinem Zustand hergestellt wurden.

Die Ergebnisse sollen im folgenden kurz zusammengestellt werden.

Apparat und Ausführung der Versuche.

Die Bestimmung des Reibungskoeffizienten geschah, wie bereits gesagt, nach der Transpirationsmethode. Der Apparat war symmetrisch zur Kapillare gebaut, damit bei derselben

1) 1. H. Schultze, Die innere Reibung von Argon und ihre Änderung mit der Temperatur. Hallenser Diss. 1901 und Ann. d. Phys. 5. p. 140—165. 1901. — 2. Derselbe, Die innere Reibung von Helium und ihre Änderung mit der Temperatur. Ann. d. Phys. 6. p. 302—314. 1901. — 3. H. Markowski, Die innere Reibung von Sauerstoff, Wasserstoff, chemischem und atmosphärischem Stickstoff und ihre Änderung mit der Temperatur. Hallenser Diss. 1903. — 4. Fr. Kleint, Über die innere Reibung binärer Mischungen zwischen Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff. Hallenser Diss. 1904. — 5. P. Tänzler, Über den Koeffizienten der inneren Reibung für Gemische zwischen Argon und Helium. Hallenser Diss. 1906. — 6. Fr. Schierloh, Über den Koeffizienten der inneren Reibung von reinem Argon und reinem Helium. Hallenser Diss. 1908. — 7. K. Schmitt, Die innere Reibung von Luft und Helium bei tiefen Temperaturen. Hallenser Diss. 1909. — 8. W. Kopsch, Die innere Reibung von Wasserstoff und Argon bei niederen Temperaturen. Hallenser Diss. 1909.

Füllung durch Hin- und Herdrücken des Gases viele Versuche hintereinander gemacht werden konnten. Eine genaue Beschreibung des Apparates hat H. Schultze in Ann d. Phys. 5. p. 141 ff. 1901 gegeben.

Zur Herstellung der Bäder von 15°, 100° und 183° diente eine Vorrichtung aus hartgelötetem Kupferblech; für die Versuche bei tiefen Temperaturen wurde sie durch ein zylindrisches versilbertes Weinhold'sches Vakuumgefäß ersetzt. Diese Veränderung bedingte eine andere Anordnung der Kapillare, durch welche das zu untersuchende Gas strömen mußte. Sie wurde in eine Spirale von sechs Windungen gelegt und außerdem, um eine genügende Vorkühlung zu erzielen, mit einem Ansatzrohr aus Glas versehen, welches auf der einen Seite zweimal, auf der anderen Seite dreimal gebogen war. Im ganzen kamen 256 cm Rohr zur Verwendung.

Berechnung der Versuche.

Die Berechnung der unkorrigierten Werte η' geschah nach der von H. Schultze¹⁾ im Anschluß an O. E. Meyer²⁾ angegebenen Formel

$$\eta'_{\text{abs.}} = \pi \cdot t \cdot \frac{[p_1(2P + p_1) - p_2(2P + p_2)] g \cdot 13,5957}{2(P + p_1)} \cdot \frac{13,5957(1 + \alpha T)}{8 \cdot M \cdot (1 + 0,000181 T)(1 + \alpha T')} \cdot \frac{R^4}{L}.$$

Hierin bedeutet:

η' den unkorrigierten Reibungskoeffizienten in absolutem Maße, wenn alle übrigen Größen in Zentimetern, Gramm und Sekunden ausgedrückt sind,

t die Dauer des Versuches,

P den korrigierten Barometerstand,

p_1 und p_2 die durch die Manometer angezeigten Drucke,

g die Schwerebeschleunigung; für Halle 981,14,

T die Temperatur des Wasserbades der Füllkugeln³⁾,

T' die Temperatur der Kapillare,

M die Masse der dem verdrängten Gasvolumen äquivalenten Quecksilbermenge,

R den Radius der Kapillare,

L die Länge der Kapillare.

1) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 154. 1901.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 263. 1866.

3) Vgl. Taf. I in Ann. d. Phys. 5. 1901.

Zur Berücksichtigung der Gleitung ist η' mit $(1 + 4\zeta/R)$ zu multiplizieren, so daß sich ergibt

$$\eta = \eta' \left(1 + \frac{4\zeta}{R} \right);$$

hier bedeutet ζ den Gleitungskoeffizienten.

Für Luft und Wasserstoff wurde als Gleitungskoeffizient bei Zimmertemperatur der von Kundt und Warburg¹⁾ aus Schwingungsbeobachtungen gefundene Wert benutzt. Für die Luftversuche bei 100° und 183° sind die von Breitenbach²⁾ bestimmten angenäherten Werte angesetzt worden. Bei den Versuchen mit Argon, Helium, Sauerstoff und Stickstoff, deren Gleitungskoeffizienten noch nicht experimentell bestimmt sind, wurde die mittlere molekulare Weglänge L in Rechnung gebracht. L ist theoretisch gleich ζ und läßt sich nach O. E. Meyer³⁾ aus der Dichte ϱ_0 (Wasser = 1), aus dem Joule-Clausius'schen Mittelwert der molekularen Geschwindigkeit G und aus dem den Beobachtungen entnommenen Reibungskoeffizienten η'_0 ohne Berücksichtigung der Gleitung finden.

Es ist nämlich

$$G^2 = \frac{3 \cdot 13,5957 \cdot 981,14 \cdot 76}{\varrho_0},$$

$$L_0 = \frac{\eta'_0}{0,28531 \cdot \varrho_0 \cdot G_0}.$$

Auch für die Versuche bei tiefen Temperaturen ist der Gleitungskoeffizient der Theorie entnommen und aus folgender Relation berechnet worden⁴⁾:

$$\zeta_2 = \zeta_1 \frac{\sqrt{1 + \alpha T_2 p_1}}{\sqrt{1 + \alpha T_1 p_2}} \cdot \frac{\eta'_2}{\eta'_1}.$$

Index 1 bezieht sich hierbei auf Zimmertemperatur, Index 2 auf die Temperatur, für welche man den Gleitungskoeffizienten haben will; η' ist der Reibungskoeffizient ohne Berücksichtigung

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337ff. u. p. 525ff.

2) P. Breitenbach, Wied. Ann. 67. p. 826. 1899.

3) O. E. Meyer, Kin. Theorie der Gase 2. Aufl. p. 56 u. 189. 1899.

4) Näheres in meiner Dissertation, Halle 1909.

der Gleitung, wie er sich durch Versuche ergibt. p wird nach Warburg¹⁾ mittels folgender Annäherungsformel bestimmt

$$p = \frac{P_0}{1 + \frac{P_0 - p_0}{P_0}},$$

wobei

$$p_0 = P + p_1 \text{ bzw. } P + p_2,$$

$$P_0 = P + p_2 \text{ bzw. } P + p_1.$$

In den folgenden Tabellen sind aus langen Versuchsreihen die Koeffizienten η' ohne Berücksichtigung der Gleitung angegeben. Diese Mittelwerte wurden zur Berücksichtigung der Gleitung mit $\left(1 + \frac{4\zeta}{R}\right)$ multipliziert; so ergab sich η .

In letzter Zeit hat Knudsen die Molekularströmung und die innere Reibungsströmung der Gase genauer untersucht²⁾ und für den Gleitungskoeffizienten folgende Formel aufgestellt:

$$\zeta = \frac{8\sqrt{2} \cdot \eta'}{3\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{q_1} \cdot p} \cdot \frac{c_1}{c_2}.$$

Hierin bedeutet:

- η' den Reibungskoeffizienten ohne Berücksichtigung der Gleitung bei der Temperatur, für die ζ berechnet werden soll,
 q_1 das spezifische Gewicht des Gases bei dem Drucke 1 Dyne/cm² in bezug auf Wasser,
 p den mittleren Druck,
 c_1/c_2 ist eine reine Zahl und kann, wie aus Knudsens Versuchen hervorgeht, gleich 0,81 gesetzt werden.

Ich habe nach Knudsens Formel den Gleitungskoeffizienten für verschiedene Gase berechnet und die so gewonnenen Werte zur Korrektur von η' benutzt. Dabei zeigte sich, daß es auf den Reibungskoeffizienten η im allgemeinen fast keinen Einfluß hat, ob die Gleitung in der bisher üblichen Weise berücksichtigt wird, oder ob für ζ der nach Knudsens Formel berechnete Wert angenommen wird. Das geht deutlich aus folgenden Tabellen hervor, in denen ich einige Ergebnisse der Rechnung mitteile.

1) E. Warburg, Pogg. Ann. 159. p. 400. 1876.

2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 75 ff. 1909.

Tabelle I.

Atmosphärische Luft. (Vgl. Arbeit 1 und 7.) ¹⁾

Nach Knudsen Alte Formel

$\eta_{189,0} \cdot 10^7 = 2575$	[2571]
$\eta_{200,7} \cdot 10^7 = 2207$	[2208]
$\eta_{15,0} \cdot 10^7 = 1808$	[1811]
$\eta_{-60,7} \cdot 10^7 = 1469$	[1470]
$\eta_{-77,5} \cdot 10^7 = 1329$	[1330]
$\eta_{-95,0} \cdot 10^7 = 1199$	[1200]

Tabelle II.

Helium. (Vgl. Arbeit 6 und 7.)

Nach Knudsen Alte Formel

$\eta_{189,7} \cdot 10^7 = 2703$	[2681]
$\eta_{200,3} \cdot 10^7 = 2344$	[2337]
$\eta_{19,7} \cdot 10^7 = 1978$	[1980]
$\eta_{-60,9} \cdot 10^7 = 1586$	[1587]
$\eta_{-78,5} \cdot 10^7 = 1505$	[1506]
$\eta_{-109,3} \cdot 10^7 = 894,6$	[894,7]

Tabelle III.

Wasserstoff. (Vgl. Arbeit 3 und 8.)

Nach Knudsen Alte Formel

$\eta_{189,0} \cdot 10^7 = 1218$	[1212]
$\eta_{100,5} \cdot 10^7 = 1043$	[1046]
$\eta_{14,5} \cdot 10^7 = 876$	[877]
$\eta_{-11,0} \cdot 10^7 = 820$	[821]
$\eta_{-60,2} \cdot 10^7 = 710$	[710]
$\eta_{-104,0} \cdot 10^7 = 374,2$	[374,2]

Aus den oben angeführten Gründen habe ich davon abgesehen, an den bereits vor Erscheinen der Knudsenschen Arbeit bestimmten Koeffizienten der inneren Reibung nachträglich Änderungen vorzunehmen. Die Tabbl. I—III beweisen, daß die übliche Korrektur von η' zur Berücksichtigung der Gleitung den tatsächlichen Verhältnissen genügend Rechnung trägt.

1) Diese und die entsprechenden späteren Ziffern beziehen sich auf die Numerierung p. 393.

Für die Änderung des Reibungskoeffizienten mit der Temperatur gibt Sutherland¹⁾ die Formel

$$\eta_{\vartheta} = \eta_0 \frac{1 + \alpha \frac{C}{\vartheta}}{1 + \frac{C}{\Theta}}$$

an, in der

ϑ die betreffende Temperatur nach Celsius und

Θ die absolute Temperatur bedeutet.

C ist ein Maß für die Kohäsion des gasförmigen Mediums.

Für Luft findet Sutherland $C = 113$; η_0 für Luft habe ich aus den genauen Versuchen von Tänzler²⁾ berechnet und erhielt

$$\eta_0 = 0,0001736.$$

Bei den übrigen gasförmigen Medien wurde durch die Sutherlandsche Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate aus einer großen Anzahl von Reibungsversuchen ein Wert für C und η_0 berechnet. Die Rechnung ergab:

	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	Entnommen
He	78,2	1887	Arbeit 6
Ar	174,6	2114	„ 6
H	88	841	„ 3
N (atmosphärisch) . .	115	1675	„ 3
N (chemisch)	113	1674	„ 3
O	188	1926	„ 3

Mit Hilfe dieser Werte für C und η_0 sind nach der Formel von Sutherland die Reibungskoeffizienten der untersuchten Gase für verschiedene Temperaturen berechnet und den beobachteten gegenübergestellt worden. Ein Vergleich lehrt, daß der Verlauf der inneren Reibung von Luft, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Argon und Helium durch diese Formel in weiten Grenzen gut wiedergegeben werden kann; bei der Temperatur der flüssigen Luft treten bei Ar, He und H Differenzen auf, die auf eine größere Reibung schließen lassen, als die Formel angibt.

1) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) 36. p. 507. 1893.

2) P. Tänzler, l. c. p. 20.

Tabelle IV.

Atmosphärische Luft.¹⁾ (Vgl. Arbeit 2, 6, 1, 7.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
183,0	13,518	3,064	76,100	2561	2576	2544	+ 1,24
100,2	13,820	2,891	75,769	2193	2213	2204	+ 0,41
99,7	10,956	2,957	75,174	2193	2208	2202	+ 0,27
17,8	13,518	3,064	75,949	1819	1828	1825	+ 0,16
15,0	10,965	2,960	75,178	1802	1811	1811	—
12,8	15,782	4,018	75,578	1789	1799	1797	+ 0,11
-49,7	14,053	4,286	75,581	1465	1470	1472	- 0,14
-77,5	14,053	4,236	75,202	1326	1330	1315	+ 1,13
-78,9	14,182	4,045	76,061	1310	1314	1308	+ 0,46
-95,9	14,053	4,236	76,103	1196	1200	1206	- 0,50

Tabelle V.

Helium. (Vgl. Arbeit 6 und 7.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
183,7	14,180	3,897	75,966	2641	2681	2682	- 0,04
99,8	14,180	3,897	75,530	2301	2337	2345	- 0,34
18,7	14,180	3,897	75,446	1950	1980	1979	+ 0,05
17,6	12,410	3,296	75,799	1941	1967	1974	- 0,36
- 60,9	12,410	3,296	75,706	1573	1587	1563	+ 1,51
- 78,5	12,410	3,296	75,617	1494	1506	1460	+ 3,05
-193,2	12,410	3,296	75,709	892,0	894,7	659	+ 26,34

1) Über den inneren Reibungskoeffizienten der Luft bei niedriger Temperatur liegen auch Versuche von Silvio Chella vor. (Il Nuovo Cimento (5) 12. p. 317ff. und Physik. Zeitschr. 7. p. 546—548. 1906.) Er bediente sich der Coulombschen Methode, die er abänderte, um einige Fehlerquellen zu beseitigen. Indessen läßt auch jetzt noch diese Methode den Reibungskoeffizienten schneller mit der Temperatur wachsen als die Transpirationsmethode, wie ich in meiner Dissertation (Halle 1909) nachgewiesen habe.

Tabelle VI.

Argon. (Vgl. Arbeit 6 und 8.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
183,3	15,888	3,975	75,332	3228	3243	3242	+0,31
99,7	"	"	75,165	2736	2751	2755	-0,15
13,17	14,182	3,781	76,043	2195	2207	2205	+0,09
- 0,21	"	"	74,871	2106	2116	2115	+0,05
- 20,3	"	"	74,971	1979	1987	1974	+0,65
- 40,2	"	"	75,660	1847	1854	1830	+1,29
- 60,2	"	"	75,099	1692	1697	1682	+0,88
- 78,8	"	"	75,895	1570	1575	1540	+2,22
-104,4	14,172	3,838	74,581	1374	1379	1354	+1,81
-132,3	"	"	73,734	1103	1106	1110	-0,36
-183,2	11,912	"	75,839	735,0	735,6	675	+8,23

Tabelle VII.

Wasserstoff. (Vgl. Arbeit 3 und 8.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
185,3	11,098	1,974	75,76	1205	1212	1203	+0,74
100,5	"	"	75,10	1039	1046	1050	-0,38
14,5	"	"	75,55	869	877	874	+0,34
- 0,1	12,410	3,296	76,481	837	844	843	+0,12
- 11,9	"	"	75,056	814	821	814	+0,85
- 17,8	"	"	75,116	796	802	800	+0,25
- 39,9	"	"	76,231	754	760	747	+1,71
- 60,2	"	"	76,268	706	710	697	+1,33
- 78,7	"	"	75,875	667	670	648	+3,28
-194,9	12,190	3,774	76,270	373,5	374,2	284	+24,1

Tabelle VIII.

Sauerstoff. (Vgl. Arbeit 3.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
185,8	11,098	1,974	76,37	2876	2885	2893	-0,28
99,7	"	"	75,29	2475	2485	2475	+0,40
16,8	"	"	75,57	2013	2023	2025	-0,09

Tabelle IX.

Atmosphärischer Stickstoff. (Vgl. Arbeit 3.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
183,0	13,518	3,064	74,72	2452	2464	2459	+0,20
101,1	11,098	1,974	75,53	2126	2134	2133	+0,05
14,0	"	"	75,93	1730	1738	1744	-0,35

Tabelle X.

Chemischer Stickstoff. (Vgl. Arbeit 3.)

T'	$p_1 (p_2)$	$p_2 (p_1)$	P	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
182,7	13,518	3,064	74,34	2446	2458	2452	+0,24
100,1	11,098	1,974	76,21	2115	2123	2125	-0,09
15,4	"	"	75,96	1739	1747	1749	-0,11

Auch bei Gasgemischen läßt sich die Sutherlandsche Formel zur Berechnung des Koeffizienten der inneren Reibung anwenden, außerdem noch die Beziehung von Puluj¹⁾ und die von M. Thiesen²⁾, nach welchen es möglich ist, den Reibungskoeffizienten eines Gasgemisches aus denen seiner Bestandteile zu berechnen.

F. Kleint und P. Tänzler haben im Physikalischen Institute der Universität Halle eine Reihe von Beobachtungen angestellt über die innere Reibung von Gasgemischen bei Zimmertemperatur, bei der Siedetemperatur des Wassers und des Anilins, und die Sutherlandsche, Puluj'sche und Thiesensche Formel einer genauen Prüfung unterzogen.

Über Apparat und Ausführung der Versuche gilt das bereits Gesagte. Die Berechnung geschah nach der auf p. 394 angegebenen Formel. Betreffs der Darstellung der Gase und Gasgemische vergleiche man die Originalarbeiten.

Die in den folgenden Tabellen angegebenen beobachteten Werte sind Mittelwerte aus einer größeren Anzahl von Einzelversuchen.

1) J. Puluj, Wiener Sitzungsber. (2) 79. p. 97—113 und p. 745 bis 756; Carls Rep. p. 578—592 und p. 633—642. 1879.

2) M. Thiesen, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 4. p. 348—360. 1902.

Tabelle XI.

Wasserstoff-Sauerstoff. (Vgl. Arbeit 4.)

Proz. O	Proz. H	$T' (g)$	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
5,21	94,79	14,7	85	1049	1082	1091	1090	+0,1
		99,5			1297	1308	1309	-0,1
		183,1			1488	1500	1499	+0,1
8,78	91,22	14,0	84	1145	1179	1188	1188	—
		100,1			1419	1430	1430	—
15,61	84,39	12,8	99	1307	1341	1351	1354	-0,2
		99,3			1638	1650	1644	+0,4
		183,3			1876	1890	1893	-0,2
33,33	66,67	18,5	107	1607	1678	1690	1691	-0,1
		99,4			2019	2033	2030	+0,1
		182,6			2324	2340	2342	-0,1
56,78	43,22	14,2	112	1800	1862	1873	1873	—
		100,2			2270	2284	2284	—
81,26	18,74	19,6	121	1908	2006	2017	2017	—
		99,8			2416	2432	2431	0,0
		183,4			2801	2817	2817	—
95,55	4,45	14,7	142	1927	2002	2012	2014	-0,1
		100,0			2471	2484	2481	+0,1
		183,6			2876	2891	2892	-0,1

Tabelle XII.

Sauerstoff-Stickstoff. (Vgl. Arbeit 4.)

Proz. O	Proz. H	$T' (g)$	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
69,24	30,76	13,4	135	1857	1929	1939	1932	+0,4
		98,8			2352	2364	2377	-0,6
		182,7			2762	2776	2768	+0,3
50,79	49,21	13,5	124	1807	1873	1882	1878	+0,2
		99,6			2287	2298	2304	-0,3
		183,2			2664	2677	2673	+0,1
25,58	74,42	14,7	124	1736	1803	1812	1811	+0,1
		100,0			2202	2213	2216	-0,1
		183,5			2557	2569	2569	—

Tabelle XIII.

Wasserstoff-Stickstoff. (Vgl. Arbeit 4.)

Proz. H	Proz. N	T' (°)	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
19,97	80,08	15,7	114	1639	1705	1714	1713	+0,1
		99,6			2066	2077	2079	-0,1
		183,1			2393	2405	2404	+0,0
36,20	63,80	14,2	104	1595	1650	1659	1659	—
		99,7			2000	2011	2013	-0,1
		183,4			2308	2321	2321	—
53,55	46,45	14,6	104	1522	1575	1585	1585	—
		99,8			1909	1921	1921	—
		183,4			2203	2216	2215	+0,0
82,61	17,39	17,0	94	1269	1318	1328	1328	—
		99,9			1581	1593	1593	—
		182,2			1815	1829	1830	-0,1
93,62	6,38	16,7	86	1067	1107	1116	1115	+0,1
		99,9			1318	1329	1333	-0,3
		183,2			1516	1529	1528	+0,1

Tabelle XIV.

Helium-Argon. (Vgl. Arbeit 5.)

Bemerkung: Das zur Untersuchung benutzte Argon war frei von Stickstoff, enthielt nur ganz geringe Beimengungen von Xenon, Krypton und Neon. Das Helium bei den Versuchen, die in Tab. XIV mitgeteilt sind, enthielt $\frac{1}{2}$ Proz. Ar.

Proz. He	Proz. Ar	T' (°)	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
4,926	95,074	12,6	150,8	2132	2207	2219	2216	+0,14
		99,8			2731	2745	2755	-0,37
		182,7			3201	3218	3215	+0,09
9,070	90,930	11,3	150,2	2143	2205	2217	2218	-0,05
		99,6			2753	2768	2768	—
		183,1			3227	3244	3233	+0,34
14,285	85,715	13,7	150,4	2153	2232	2244	2245	-0,04
		99,9			2769	2784	2782	+0,07
		184,3			3236	3254	3255	-0,03

Tabelle XIV (Fortsetzung).

Proz. He	Proz. Ar	T' ($^{\circ}$)	C	$\eta_0 \cdot 10^7$	$\eta' \cdot 10^7$	$\eta \cdot 10^7$ beob.	$\eta \cdot 10^7$ ber.	Differenz in Proz.
19,256	80,744	19,7	143,7	2166	2281	2294	2296	-0,08
		99,6			2774	2790	2789	+0,04
		183,1			3231	3250	3252	-0,06
22,945	77,055	20,5	139,1	2165	2288	2301	2301	—
		99,8			2769	2785	2785	—
31,542	68,458	22,1	142,8	2166	2302	2316	2312	+0,17
		99,5			2760	2777	2787	-0,37
		183,1			3233	3253	3250	+0,09
38,807	61,193	21,6	116,6	2207	2326	2341	2345	-0,17
		99,4			2789	2807	2803	+0,14
		183,6			3223	3244	3247	-0,09
46,626	53,374	20,9	106,0	2205	2317	2334	2334	—
		99,5			2764	2785	2785	—
70,853	29,147	19,1	96,5	2189	2282	2303	2303	—
		99,9			2726	2752	2752	—
80,785	19,215	18,9	78,2	2142	2222	2246	2248	-0,08
		99,8			2630	2658	2663	-0,19
		183,0			3007	3039	3042	-0,10

Aus der Tab. XIV geht hervor, daß der Reibungskoeffizient von Argon vergrößert wird, wenn man Helium zusetzt. Diese Erscheinung überrascht deshalb, weil He einen kleineren Reibungskoeffizienten hat als Ar; man könnte also eher das Gegenteil erwarten. Das Ansteigen erfolgt übrigens bis zu einem Maximum, welches erreicht ist, wenn die Mischung etwa 40 Proz. He und 60 Proz. Ar enthält. Hierauf machte bereits Tänzler¹⁾ aufmerksam. Graham²⁾ beobachtete dasselbe an Mischungen von Wasserstoff mit anderen Gasen. Später konnte Puluž dies bestätigen, als er zur Prüfung der von ihm aufgestellten Formel Mischungen von Wasserstoff und Kohlensäure untersuchte.

1) P. Tänzler, l. c. p. 30.

2) Graham, Phil. Trans. p. 622. 1846.

Ebenso wie bei den Versuchen mit reinen Gasen wurden auch hier bei den Versuchen mit Gemischen nach der Sutherlandschen Formel

$$\eta_{\vartheta} = \eta_0 \frac{1 + \alpha C}{1 + \frac{C}{\Theta}} \sqrt{1 + \alpha \vartheta}$$

die Größen η_0 und C für jedes Gemisch nach der Methode der kleinsten Quadrate angerechnet und die gefundenen Werte wieder in die Formel eingesetzt. Die so gewonnenen Ergebnisse für η sind in den Tab. XI–XIV unter „berechnet“ mitgeteilt.

Um die Beobachtungen auch mit der Theorie von Puluj und mit derjenigen von Thiesen zu vergleichen, wurden sämtliche Reibungskoeffizienten mit Hilfe der Formel von Sutherland auf 15° , 100° und 183° reduziert und dann für diese drei Temperaturen die Reibungskoeffizienten nach Puluj und nach Thiesen berechnet.

Die Pulujsche Formel lautet

$$\eta = \eta_1 \cdot \frac{\sqrt{p_1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot p_2}}{\left[p_1 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right)^{2/3} \cdot p_2 \right]^{2/3}}$$

Hierin bedeuten η_1 und η_2 die Reibungskoeffizienten der einzelnen Bestandteile des Gemisches, p_1 und p_2 die Partialdrucke ($p_1 + p_2 = 1$), m_1 und m_2 die Molekulargewichte der reinen Gase.¹⁾ η ist der Reibungskoeffizient des Gemisches.

Die Beziehung von Thiesen lautet

$$\eta = \frac{\eta_1}{1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}} + \frac{\eta_2}{1 + \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$$

η , η_1 und η_2 haben hierin dieselbe Bedeutung wie bei Puluj; unter φ_1 und φ_2 sind die Volumenprocente der Mischung, unter a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} zu bestimmende Konstanten zu verstehen.

Die Quotienten

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = A, \quad \frac{a_{21}}{a_{22}} = B,$$

1) O. E. Meyers Lehrbuch „Die kinetische Theorie der Gase“ 1899, p. 196 und 197, entnommen.

welche in der Formel auftreten, sind nach der Methode der kleinsten Quadrate für die drei angegebenen Temperaturen berechnet und wieder in die Thiesensche Gleichung eingeführt worden; so wurden die unter „berechnet“ angeführten Werte erhalten.

Tabelle XV.

Sauerstoff-Wasserstoff. (Vgl. Arbeit 4).

p_1 (O)	p_2 (H)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
$A = 0,373. \quad 15^\circ. \quad B = 1,862.$						
0,0000	1,0000	878	878	878	—	—
0,0521	0,9479	1092	1120	1076	-2,6	+1,47
0,0878	0,9122	1191	1241	1189	-4,2	+0,17
0,1561	0,8439	1359	1416	1369	-4,2	-0,74
0,3333	0,6667	1674	1689	1676	-0,9	-0,12
0,5678	0,4322	1877	1871	1883	+0,3	-0,32
0,8126	0,1874	1992	1970	1982	+1,1	+0,50
0,9555	0,0445	2014	2005	2009	+0,4	+0,25
1,0000	0,0000	2014	2014	2014	—	—
$A = 0,353. \quad 100^\circ. \quad B = 1,662.$						
0,0000	1,0000	1049	1049	1049	—	—
0,0521	0,9479	1309	1343	1297	-2,6	+0,92
0,0878	0,9122	1430	1492	1438	-4,3	-0,56
0,1561	0,8439	1652	1709	1658	-3,5	-0,36
0,3333	0,6667	2035	2054	2032	-0,9	+0,15
0,5678	0,4322	2283	2293	2291	-0,4	-0,35
0,8126	0,1874	2433	2427	2429	+0,2	+0,16
0,9555	0,0445	2484	2476	2477	+0,3	+0,28
1,0000	0,0000	2489	2489	2489	—	—
$A = 0,388. \quad 183^\circ. \quad B = 1,331.$						
0,0000	1,0000	1210	1210	1210	—	—
0,0521	0,9479	1500	1550	1485	-3,3	+1,00
0,1561	0,8439	1889	1972	1900	-4,4	-0,58
0,3333	0,6667	2341	2372	2347	-1,3	-0,26
0,8126	0,1874	2815	2805	2820	+0,4	-0,18
0,9555	0,0445	2888	2863	2868	+0,9	+0,69
1,0000	0,0000	2878	2878	2878	—	—

Tabelle XVI.

Sauerstoff-Stickstoff. (Vgl. Arbeit 4.)

p_1 (O)	p_2 (N)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
		$A = 0,456.$	$15^\circ.$	$B = 2,443.$		
0,0000	1,0000	1744	1744	1744	—	—
0,2558	0,7442	1813	1809	1814	+0,2	—0,06
0,5079	0,4921	1890	1876	1892	+0,7	—0,11
0,6924	0,3076	1944	1927	1943	+0,9	+0,05
1,0000	0,0000	2014	2014	2014	—	—
		$A = 0,93.$	$100^\circ.$	$B = 1,10.$		
0,0000	1,0000	2126	2126	2126	—	—
0,2558	0,7442	2213	2213	2214	—	—0,05
0,5079	0,4921	2300	2302	2305	—0,1	—0,22
0,6924	0,3076	2376	2370	2373	+0,3	+0,13
1,0000	0,0000	2489	2489	2489	—	—
		$A = 0,48.$	$183^\circ.$	$B = 2,32.$		
0,0000	1,0000	2460	2460	2460	—	—
0,2558	0,7442	2567	2560	2569	+0,3	—0,08
0,5079	0,4921	2676	2663	2689	+0,5	—0,49
0,6924	0,3076	2773	2741	2768	+1,2	+0,18
1,0000	0,0000	2878	2878	2878	—	—

Tabelle XVII.

Stickstoff-Wasserstoff. (Vgl. Arbeit 4.)

p_1 (N)	p_2 (H)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
<hr/>						
$A = 0,23.$		$15^\circ.$	$B = 3,57.$			
0,0000	1,0000	878	878	878	—	—
0,0638	0,9862	1111	1113	1105	-0,2	+0,54
0,1739	0,8261	1321	1347	1335	-2,0	-1,06
0,4645	0,5355	1587	1612	1593	-1,6	-0,38
0,6380	0,3620	1663	1679	1663	-1,0	—
0,8003	0,1997	1711	1717	1707	-0,3	+0,23
1,0000	0,0000	1744	1744	1744	—	—

Tabelle XVII (Fortsetzung).

p_1 (N)	p_2 (H)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
		$A = 0,20.$	$100^\circ.$	$B = 4,988.$		
0,0000	1,0000	1049	1049	1049	—	—
0,0638	0,9362	1329	1334	1323	-0,4	+0,45
0,1739	0,8261	1593	1620	1602	-1,7	-0,56
0,4645	0,5355	1922	1952	1925	-1,5	-0,16
0,6380	0,3620	2012	2040	2016	-1,4	-0,20
0,8003	0,1997	2078	2089	2075	-0,5	+0,14
1,0000	0,0000	2126	2126	2126	—	—
		$A = 0,215.$	$183^\circ.$	$B = 4,297.$		
1,0000	0,0000	1210	1210	1210	—	—
0,0638	0,9362	1527	1539	1528	-0,8	-0,07
0,1739	0,8261	1828	1871	1852	-2,4	-1,31
0,4645	0,5355	2215	2257	2227	-1,8	-0,54
0,6380	0,3620	2320	2359	2334	-1,7	-0,60
0,8003	0,1997	2405	2417	2401	-0,5	+0,17
1,0000	0,0000	2460	2460	2460	—	—

Tabelle XVIII.

Argon-Helium. (Vgl. Arbeit 5.)

p_1 (Ar)	p_2 (He)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
$A = 0,343. \qquad 15^\circ. \qquad B = 2,032.$						
1,0000	0,00000	2220	2220	2220	—	—
0,95074	0,04926	2231	2227	2230	+0,18	+0,05
0,90930	0,09070	2243	2234	2238	+0,40	+0,23
0,85715	0,14285	2253	2242	2249	+0,49	+0,18
0,80744	0,19256	2266	2250	2259	+0,71	+0,32
0,77055	0,22945	2264	2255	2266	+0,40	-0,09
0,68458	0,31542	2266	2268	2280	-0,08	-0,64
0,61193	0,38807	2303	2277	2291	+1,13	+0,52
0,53374	0,46626	2299	2286	2299	+0,57	—
0,29147	0,70853	2280	2286	2282	-0,26	-0,09
0,19215	0,80785	2226	2256	2234	-1,33	-0,36
0,00000	1,00000	1966	1966	1966	—	—

Tabelle XVIII (Fortsetzung).

p_1 (Ar)	p_2 (He)	$\eta \cdot 10^7$			Differenz in Proz. Puluj	Differenz in Proz. Thiesen
		beob.	ber. Puluj	ber. Thiesen		
$A = 0,375. \quad 100^\circ. \quad B = 1,957.$						
1,00000	0,00000	2756	2756	2756	—	—
0,95074	0,04926	2756	2764	2764	-0,33	-0,30
0,90930	0,09070	2770	2771	2771	-0,03	-0,04
0,85715	0,14285	2783	2780	2779	+0,11	+0,15
0,80744	0,19256	2791	2788	2786	+0,11	+0,18
0,77055	0,22945	2784	2793	2790	-0,32	-0,21
0,68458	0,31542	2790	2805	2799	-0,54	-0,33
0,61193	0,38807	2806	2814	2803	-0,29	+0,11
0,53374	0,46626	2788	2821	2803	-1,18	-0,54
0,29147	0,70853	2753	2802	2746	-1,75	+0,25
0,19215	0,80785	2664	2751	2677	-3,65	-0,48
0,00000	1,00000	2355	2355	2355	—	—
$A = 0,446. \quad 183^\circ. \quad B = 1,692.$						
1,00000	0,00000	3227	3227	3227	—	—
0,95074	0,04926	3217	3236	3234	-0,59	-0,53
0,90930	0,09070	3232	3243	3239	-0,34	-0,22
0,85715	0,14285	3248	3252	3245	-0,12	+0,09
0,80744	0,19256	3252	3259	3249	-0,22	+0,09
0,68458	0,31542	3250	3277	3253	-0,82	-0,09
0,61193	0,38807	3244	3284	3249	-1,23	-0,13
0,19215	0,80785	3042	3182	3041	-4,67	+0,03
0,00000	1,00000	2691	2691	2691	—	—

Die hier mitgeteilten Untersuchungen über Gasgemische zeigten folgende Ergebnisse, die auch aus den angegebenen Tabellen direkt zu ersehen sind.

1. Durch geringe Beimengungen von Sauerstoff und Stickstoff wird der Reibungskoeffizient von Wasserstoff beträchtlich erhöht, während Wasserstoff selbst die Reibungskoeffizienten von Sauerstoff und Stickstoff nur wenig beeinflusst.

2. Durch die Sutherlandsche Formel können die Reibungskoeffizienten der Gemische zwischen Argon und Helium

und der Gemische zwischen Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff gut ausgedrückt werden.

3. Thiesens Formel für die Reibung von Gasgemischen schließt sich den Beobachtungen besser an als die von Puluž.

4. Die Bedingung $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22}$, an welche nach Thiesen das Bestehen einer „Diffusionskonstanten“ geknüpft ist, ist für die Kombinationen Ar/He; H/O, N/O, H/N nicht erfüllt.

(Eingegangen 14. August 1909.)

13. Austritt negativer Elektronen aus reagierenden Metallen; von F. Haber und G. Just.

(Aus dem Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie der Technischen Hochschule „Fridericiana“ zu Karlsruhe.)

1. Metalle enthalten als wesentliche Bestandteile positiv geladene Massenteilchen und freie negative Elektronen. Letztere verschwinden beim Übergang der Metalle in Oxyde (Hydroxyde) und Salze. Dieser Übergang wird molekularmechanisch ein turbulenter Vorgang sein. Man kann darum erwarten, daß von reagierenden Metallen unter Umständen freie negative Elektronen abgegeben werden. Es läßt sich nicht voraussagen, ob dieselben eine erhebliche Anfangsgeschwindigkeit haben werden. Bei geringer Anfangsgeschwindigkeit kann man aber immerhin erwarten, daß sie durch ein angelegtes Gleichstromfeld aus der Reaktionszone weggeführt werden können. Je leichter sich das negative Elektron vom positiven Metallion trennt, um so eher ist diese Erscheinung zu erwarten. In Lösungen wird die Leichtigkeit der Abtrennung durch die Elektroaffinität gemessen. Nach Elster und Geitel¹⁾ ordnen sich die Metalle hinsichtlich des photoelektrischen Effektes in derselben Reihenfolge, wie nach der Elektroaffinität. Danach ist zu gewärtigen, daß sich die Erscheinung am ehesten bei den unedelsten Metallen, also bei den Alkalimetallen, finden wird.

2. Wirkt gewöhnliche Luft auf die bekannte flüssige Legierung von Kalium und Natrium, so überzieht sich dieselbe sofort mit einer weißen Haut von Oxyd und Hydroxyd. Verbindet man die auf einer Glasschale oder in einem flachen Eisengefäß oder auf einem Holzteller²⁾ untergebrachte Legierung

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 43. p. 225 1891; 52. p. 433. 1894; vgl. auch E. Ladenburg, Ann. d. Phys. 12. p. 558. 1903.

2) Glasschale, Eisengefäß oder Holzteller werden auf eine gut isolierende Hartgummiplatte gestellt.

mit dem negativen Pol einer trockenen Hochspannungssäule, hängt man darüber in etwa 4 cm Abstand eine Messingscheibe, welche mit dem Elektroskop verbunden ist, und überfährt man die Legierung mit einem Glasstab oder mit der Schneide eines Rasiermessers (welches am hoch isolierten Griff gehalten wird), so daß blanke Legierung hervortritt und der Luftwirkung ausgesetzt wird, so ladet sich das Elektroskop alsbald negativ auf. Ersetzt man die trockene Säule durch eine Hochspannungsbatterie (1100 Volt) und das Elektrometer durch ein Galvanometer von der Empfindlichkeit $0,9 \cdot 10^{-9}$ Ampere pro Skalenteil, so erhält man beim regelmäßigen Abstreichen der Oxydschicht leicht einen dauernden Strom von etwa 15 Skt. Erdet man die Legierung, während man der darüber befindlichen Messingplatte, welche mit dem Elektroskop verbunden ist, eine kräftige positive Ladung gibt, so beobachtet man beim Freilegen des Metalls durch Abstreichen Entladung des Elektroskops.

3. Kehrt man bei den unter 2. beschriebenen Versuchen die Vorzeichen um, so ist der Effekt entweder Null oder wenigstens von einer *wesentlich* kleineren Größenordnung. Bei unseren bisherigen Versuchen haben wir keine sichere Wirkung am Elektroskop nachweisen können. Jedenfalls ist der Effekt im stärksten Maße in dem Sinne polar, daß negative, aber nicht positive Teilchen vom reagierenden Metall hergegeben werden. Der „Reaktionsstrom“ hat also dasselbe Vorzeichen wie der lichtelektrische Strom.

4. Dieselben Erscheinungen beobachtet man, wenn man eine Natriumscheibe mit einem Rasiermesser an isoliertem Griff schabt, so daß sie immer wieder stellenweise blank wird. Man nimmt sie ferner wahr, wenn man eine Glas- oder Platinschale mit Lithiumamalgam füllt und die an der Oberfläche durch die Wirkung der Luft entstehende weiße Haut von Oxyd bzw. Hydroxyd mit Glas oder isoliertem Eisen wegstreicht. In diesem Falle kann man die Beobachtung machen, daß bei isoliertem, stark negativ geladenem Amalgam nach dem Wegstreichen mit dem Messer eine kurze Zeit vergeht, ehe die Oberfläche matt wird. Ein gleicher Verzug zeigt sich auch im Eintritt des elektrischen Effektes. Daraus sieht man, daß es sich nicht um eine reibungselektrische Erregung handeln

kann, was auch aus der Vertauschbarkeit von Glas und Metall als Reibinstrument hervorgeht.

5. Die beschriebenen elektroskopischen Erscheinungen treten auch dann ein, wenn man im vollkommen dunklen Raume arbeitet und die zur Ablesung des Elektroskops erforderliche Beleuchtung erst einige Zeit nach dem letzten Abstreichen einschaltet, wenn keine lichtelektrisch empfindliche blanke Oberfläche mehr vorhanden ist.

6. Nach dem Verfahren von Elster und Geitel (l. c.) wurde die bekannte Legierung von zwei Gewichtsteilen Kalium und einem Gewichtsteil Natrium in einer Glaskugel erschmolzen, die durch einen Hahn mit der Quecksilberpumpe in Verbindung stand. Von der Glaskugel führte ein seitliches Rohr, in welches ein Trichter hineingesetzt war, in ein weites zylindrisches Glasrohr, welches am Boden einen eingeschmolzenen Platindraht und am Kopf eine mit Bernsteinisolation versehene eingesiegelte Stricknadel trug. Das untere Ende der Nadel war 11 cm von der Spitze des Platindrahtes entfernt. Die geschmolzene Legierung ließ man durch Neigen des Gefäßes, unter Zutritt von trockenem Wasserstoff durch den zuvor mit der Pumpe verbundenen Hahn, in das zylindrische weite Glasrohr übertreten. Dann wurde der Apparat aufgerichtet, eine negative Spannung von 1100 Volt an den in die Legierung tauchenden Platindraht gelegt und die Stricknadel mit dem Elektroskop verbunden. Die Legierung bildete eine Schicht von 2 cm Höhe mit blanker Oberfläche. Beim Schütteln des Gefäßes trat jetzt keine Ladung des Elektroskops auf. Nunmehr wurde der Wasserstoff ausgepumpt und Luft eingelassen. Wiederum trat beim Schütteln zunächst keine Veränderung ein, aber es bildete sich auch nicht die weiße Oxyd- bzw. Hydroxydecke, sondern eine schwarze, rußartig erscheinende Haut, die wohl als ein Gemenge fein verteilter Legierung mit Oxyd- oder Superoxydpartikeln aufzufassen ist. Saugte man diese Luftfüllung ab, ließ feuchte Luft eintreten und wiederholte dies einige Male, so daß wenigstens ein wenig von einem weißen Oxyd bzw. Hydroxyd in dem Reaktionsgefäß zu sehen war, so ließ sich nunmehr der polare Effekt sehr gut erreichen. Pumpte man jetzt die Luft wiederum aus und ersetzte sie durch feuchten Wasserstoff, so verschwand er zwar nicht, nahm

aber sehr stark ab. Zu dieser Beschreibung ist noch hinzuzufügen, daß die in den Reaktionszylinder gelangenden Wasserdampfmengen naturgemäß immer sehr klein waren, da die feuchten Gase zunächst durch die Kugel gingen, in welcher die Legierung erschmolzen worden war, und dann durch das verbindende Glasrohr strichen, durch welches die Legierung in den Reaktionsraum hinübergedrückt worden war. Da sowohl in dem Schmelzraum als in dem Verbindungsrohr Reste der Legierung zurückblieben, so ging der Wassergehalt der feuchten Gase auf dem Wege in das Reaktionsgefäß naturgemäß zum erheblichen Teile verloren. Dem entsprach auch, daß die auf der flüssigen Legierung sichtbare Schicht, durch welche das Metall beim Schütteln blank durchbrach, in dem ganzen Experiment in der Hauptsache schwarz blieb. Immerhin geht aus dem Resultate deutlich hervor, daß das Wasser bei dem Vorgang eine wichtige Rolle spielt.

7. Bei den bisher beschriebenen Versuchen wurde ein elektrisches Feld verwendet, um die negativen Elektronen aus dem Reaktionsgebiet wegzuziehen. Dies ist nicht unbedingt erforderlich. Man nimmt die Legierung von Kalium und Natrium und bringt sie auf eine isolierte Glasschale oder auf einen isolierten Holzteller und legt sie an das gut isolierte eine Quadrantenpaar eines Spiegelelektrometers. Das andere Quadrantenpaar wird geerdet. Streicht man nun die alsbald entstehende weiße Decke von Oxyd bzw. Hydroxyd mit einem Glasstabe oder mit einem Rasiermesser am isolierten Griff weg, so daß blanke Legierung hervortritt, so entsteht entweder überhaupt kein Effekt oder die Wirkung ist doch wenigstens so klein, daß wir darüber nichts Sicheres behaupten möchten. Bläst man aber während des Abstreichens aus einer Stahlflasche einen Strom trockener Luft über die Legierung, so ladet sich das Elektrometer rasch auf mehrere Volt positiv auf. Unterläßt man das Abstreichen, so veranlaßt der Luftstrom keine Veränderung. Der Luftstrom nimmt also offenbar die negativen Elektronen fort, die wir bei den früher beschriebenen Versuchen mittels des elektrischen Feldes aus der Reaktionszone entfernten. Wir schließen aus dem Ergebnis, daß die Anfangsgeschwindigkeiten der Elektronen klein sind.

8. Aus den beschriebenen Versuchen ergibt sich, daß der „Reaktionseffekt“ dem lichtelektrischen Effekt in vieler Hinsicht sehr ähnlich ist. Die hauptsächlichliche Abweichung liegt darin, daß ohne die Hilfe eines Feldes oder eines Luftstromes die Elektronen von der Entstehungsstelle bei dem Reaktionseffekt nicht zahlreich genug fortgehen, um eine deutliche positive Ladung des Metalles oder das Auftreten negativer Ladungen im Gasraum wahrnehmen zu können, während bei dem lichtelektrischen Effekte die Anfangsgeschwindigkeiten groß genug sind, um die entsprechenden Nachweise leicht zu ermöglichen. Die Ähnlichkeit beider Effekte erscheint wohl begründet, wenn man den lichtelektrischen Effekt als eine Zersprengung durch Resonanzschwingung, den Reaktionseffekt als eine Zersprengung durch chemische Umsetzung ansieht. Nach der chemischen Seite ist der Vorgang weiterer Untersuchung bedürftig, die alsbald unternommen werden soll. Soviel sich bis jetzt sehen läßt, folgt er bei den unedelsten Metallen in seiner Stärke der Reihenfolge der Elektroaffinität, gerade wie es Elster und Geitel vom lichtelektrischen Effekt behauptet haben. Die Schwierigkeit bei dem Studium außerordentlich unedler Stoffe, wie Rubidium und Caesium, besteht vornehmlich darin, daß diese Metalle leicht Feuer fangen. Sobald das aber eintritt, wird der Versuch für die hier erörterten Verhältnisse unbrauchbar, da mit der Feuererscheinung Ionenbildung, Entstehung von Nebeln und somit mannigfaltige Störung verbunden ist. Die weitere Untersuchung wird auch auf weniger unedle Metalle, den Reaktionsvorgang bei höherer Temperatur, die Rolle des Wasserdampfes und den Ersatz der feuchten Luft durch andere angreifende Gase erstreckt werden.

Wir danken unserem Kollegen, Hrn. Privatdozenten Dr. Hermann Sieveking, daß er uns durch seine freundliche und sachkundige Hilfe bei den oft nicht ganz einfachen Versuchen ermöglicht hat, erheblich rascher als es sonst möglich gewesen wäre, Sicherheit über die mitgeteilten Resultate zu gewinnen.

(Eingegangen 9. August 1909.)

14. *Bemerkung*
zu Hrn. L. Baumgardts Angaben bezüglich der
Möglichkeit eines entscheidenden Experiments
über unipolare Induktion;
von S. J. Barnett.

In seiner Mitteilung¹⁾ über diesen Gegenstand, die ich bis vor kurzer Zeit übersehen hatte, spricht Hr. Baumgardt von der Unmöglichkeit, das alte Problem der unipolaren Induktion durch Beobachtungen mit geschlossenen Strömen (Versuche von Faraday und Plücker), oder auch durch Versuche mit offenen Stromkreisen (entsprechend den Ideen von Preston²⁾, Hertz, Lecher³⁾ und anderen) zu lösen; er fährt dann fort: „Die Sachlage ist jedoch durchaus geändert, seitdem durch den Wilsoneffekt die von der Lorentzschens Theorie geforderte *Abhängigkeit der in bewegten Isolatoren induzierten elektromotorischen Kraft von der Dielektrizitätskonstante* bewiesen ward. Diese Eigenschaft bewegter Dielektrika liefert die Möglichkeit, das alte magnetische Problem eindeutig zu lösen.“

Tatsächlich jedoch zeigt weder einer der Versuche über die Bewegung von Isolatoren in magnetischen Feldern — die Versuche von Blondlot⁴⁾, die späteren von Wilson⁵⁾, oder die jüngsten von mir⁶⁾ — irgendwie eine Abhängigkeit der induzierten elektromotorischen Kraft von der Dielektrizitätskonstante, noch gibt es eine solche Abhängigkeit in der Lorentzschens Theorie. Wilsons Bemerkung, auf die sich Hr. Baumgardt bezieht, entstand lediglich durch eine unrichtige Interpretation seiner eigenen Versuche und der Lorentzschens Theorie.

Die vorgeschlagene Lösung führt also ebensowenig, wie offenbar alle früheren, zur Entscheidung.

New Orleans, 3. Juli 1909.

1) L. Baumgardt, Ann. d. Phys. 23. p. 986. 1907.

2) S. T. Preston, Phil. Mag. (5) 31. p. 100. 1891.

3) E. Lecher, Wied. Ann. 54. p. 276. 1895.

4) R. Blondlot, Journ. de phys. (4) 1. p. 8. 1902.

5) H. A. Wilson, Trans. Roy. Soc. (A) 204. p. 121. 1904.

6) S. J. Barnett, Phys. Rev. 27. p. 425. 1908.

(Eingegangen 15. Juli 1909.)

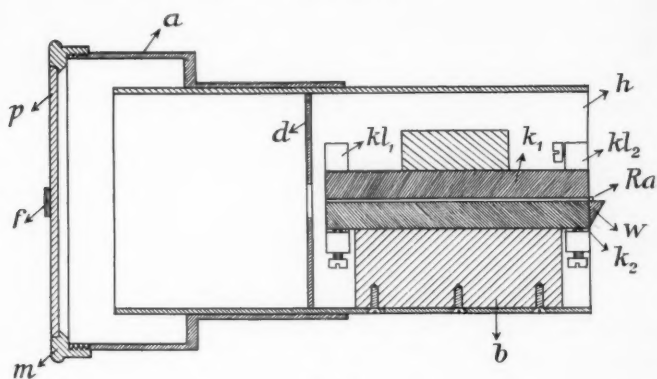


Fig. 1.

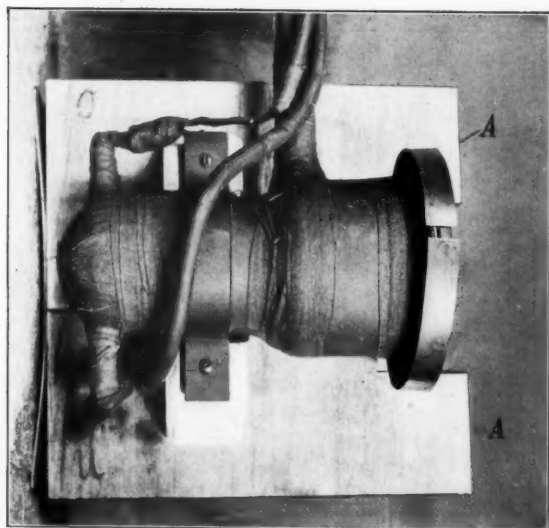


Fig. 3.

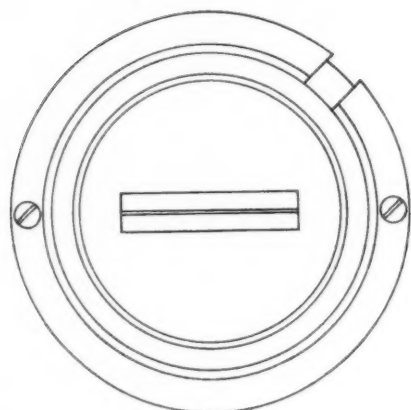


Fig. 2.



Fig. 6.

Kurt Wolz.

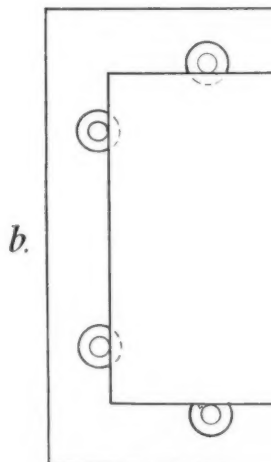
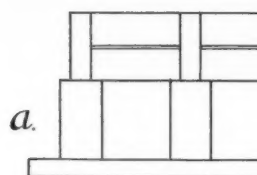


Fig. 5.

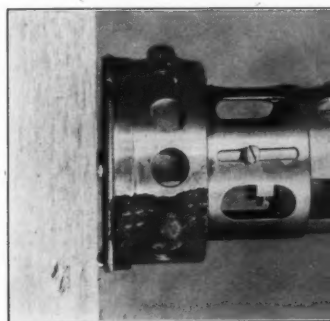
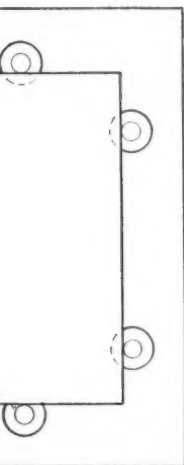
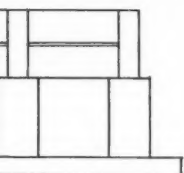
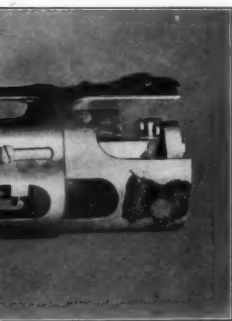


Fig. 4.

Tafel 1.



g. 5.



. 4.



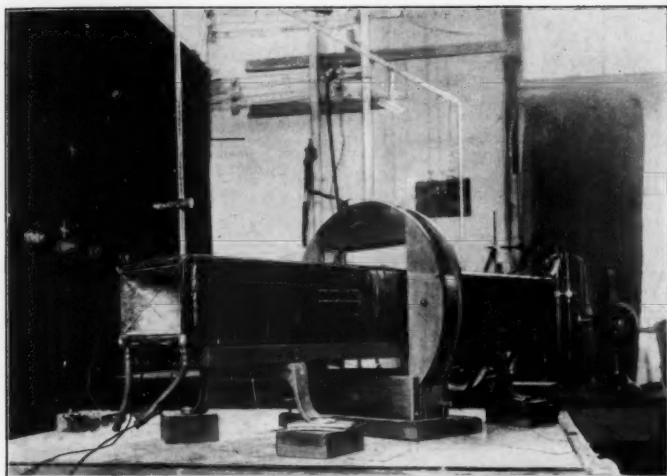
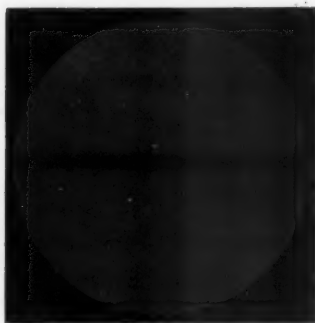


Fig. 7.



Nr. 8 zu p. 284
(unbrauchbar für Messungen).



Nr. 10.

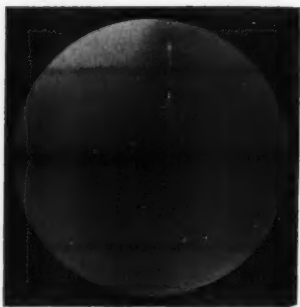


Nr. 11.



Nr. 14.

Kurt Wolz.



Nr. 15.



Nr. 17.



Nr. 23.



Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Prospekt.

Technische Berechnungen

**für die Praxis
des Maschinen- und Bautechnikers**

Ein Handbuch

über gelöste Beispiele aus der gesamten Mechanik,
der Maschinen-, Holz- und Bautechnik, einschließlich
Eisenbeton- und Brückenbau

VON

EMERICH GRAF

Ingenieur

VIII, 374 Seiten. 1909.

Preis gebunden Mark 6.80.

Vorwort.

Bei der Bearbeitung vorliegenden Werkes betrachtete es der Verfasser für seine Aufgabe, sowohl dem studierenden wie dem ausführenden Techniker ein umfangreiches Repetitorium über die mannigfaltigsten Berechnungen auf maschinen- und bautechnischem Gebiete zugänglich zu machen.

Jeder Techniker soll dafür eintreten, daß seine konstruktiven Arbeiten betriebssicher dimensioniert sind, und das kann nur dann möglich sein, wenn die einer Maschine zugesprochene Leistung oder die von einem Einzelteil verlangte Beanspruchung auf rechnerischem Wege eingehend ermittelt wurde.

Auf dem Wege der Schätzung wird selten die richtige Dimensionierung getroffen, besonders bei Ausführungen, mit denen ein Techniker noch wenig oder gar nichts zu tun hatte.

Selbstverständlich fehlt dann auch die Geläufigkeit zur Anwendung einer solchen Rechnung, es tritt dieser die zeitraubende Information in zuschlägigen technischen Werken voran, und

dieser Weg ist mit der Praxis, wo alles schnell erledigt werden möchte, kaum vereinbar.

Wenn auch die verschiedenen Taschenbücher und Fachkalender gute Ratgeber für das am Konstruktionstisch arbeitende Personal sind, so führt deren Benutzung doch nicht so schnell zum Ziele wie ein Buch, das einen Rechnungsvorgang in Beispielform verständlich vor Augen führt.

Auf diese Grundlage gestützt übergebe ich dieses auf technischem Gebiete so vielseitige Hilfsbuch meinen Herren Berufskollegen mit der Bitte um Nachsicht, wenn sich in den vielen Rechnungslösungen ein Fehler eingeschlichen haben sollte. Etwaige Berichtigungen nehme ich stets dankbar entgegen und gebe mich der angenehmen Hoffnung hin, daß dieses Buch seinen Zweck erfüllt und Beifall finden möge.

Für die geschmackvolle Ausstattung des Werkes danke ich meinem Herrn Verleger auf diesem Wege.

Elbing, im April 1909.

Emerich Graf.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Allgemeine Mechanik.	
Gleichförmige Bewegung	1—2
Gleichförmig beschleunigte Bewegung	2
" verzögerte "	2—3
Freier Fall der Körper	3
Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten	3—4
Einfache konstante Kraft für Bewegungen	4
Kraft, Masse und mechanische Arbeit	5—6
Arbeit der Trägheitskraft	6—7
Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte	7—9
Reibung	9
Tabellen der Reibungskoeffizienten	9—11
Gleitende Reibung	11—13
Die Reibung am Keil	13—14
" " an der Schraube	14—15
" " am liegenden Zapfen	15—17
" " stehenden "	17—18
Rollende Reibung	19—20
Zentrifugalkraft	21
Der Stoß zweier Körper	21—22
Statik flüssiger Körper	23—26
Dynamik flüssiger Körper	26
Ausfluß des Wassers aus Gefäßen	26—33
" " " durch kurze Ansatzröhren	33—35
" " " " lange "	35—39

TECHNISCHE BERECHNUNGEN.

	Seite
Der Druckhöhenverlust in Knie- und Bogenrohren	39—42
Ausfluß unter abnehmendem Druck	42—43
Bewegung des Wassers in Kanälen	44—45
Vom Stoß des Wassers	45—46
Arbeitsvermögen des fließenden Wassers	46—47
Vom Gleichgewicht und Druck der Luft	47—48
Arbeit der komprimierten Luft	48—49
Die Luftpumpe	49—50
Volumen der erwärmten Luft	50
Dichtigkeit der Luft	50
Auftrieb der Luft	50—51
Vom Ausfluß der Luft	51—52
Von der Wärme	53—58
Berechnung der Dampfheizung für ein Zimmer	59—62
Bewegung des Wasserdampfes durch Rohrleitungen	62—63

Festigkeitslehre.

Beanspruchung auf Zug	66—67
" " Druck	67—69
" " Zerknickung	69—72
" " Schub oder Abscheerung	72—75
" " Verdrehung	75
Tabelle über Trägheits- und Widerstandsmomente verschiedener Querschnittsformen	76—83
Beanspruchung auf Biegung	83—114
Schiefer Zug	114—116
Exzentrische Belastung	116—117
Balken auf Zug und Biegung	117—118
Verdrehung und Druck oder Zug zugleich	118
Festigkeit ebener Platten	118—121
Wandstärke von Hohlzylindern	121—122
Blattfedern	122—124
Spiralfeder mit rundem Querschnitt	124
" " rechteckigem Querschnitt	125
Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitt	125—126
" " rechteckigem	126
Kegelstumpffeder mit kreisförmigem Querschnitt	126
" " rechteckigem	126—127
Gewundene Biegefedern	127—128
Gerade Torsionsfeder mit kreisförmigem Querschnitt	128
" " rechteckigem	128—129

Maschinenelemente.

Schrauben	129
Keile	129—130
Zapfen	130
Der zylindrische Stirnzapfen	130—131
Der Gabelzapfen	131—132
Der kugelförmige Stirnzapfen	132
Der Spurzapfen	132—133
Der Kammzapfen	133
Achsen	133—140
Wellen (reine Transmissionswellen)	140—141
Wellen auf Biegung und Drehung	141—147
Der Kurbeltrieb	147
Kurbel und Kurbelwellen	147—152
Pleuelstangen	152—153
Kreuzköpfe	153
Kolbenstangen	153—154
Der Riementrieb	154—156
Der Hanfseiltrieb	157—158
Der Drahtseiltrieb	158—161
Zahnräder	161—164
Schneckenrad und Schnecke	164—166

EMERICH GRAF,

	Seite
Reibungsräder	166—168
Reibungskuppelungen	168
Die Schubkeilkuppelung	168—170
Bremsen	171
Einfache Backenbremsen	171—172
Bandbremsen	172—173
Differential-Bandbremsen	174
Bandbremsen für wechselnde Umlaufrichtung	174—175
Das Bremsdynamometer	175

Elemente der Hebezeuge.

Drahtseile, Seilreibung und Seilsteifigkeit	175—176
Hanfseile	177
Gliederketten	177
Gallsche Ketten	178
Gurte und Gurttrommeln	178
Haken	178
Die lose Lastrolle	179—181
„ „ Treibrolle	181—182
„ feste Rolle	182—183
Der einfache Rollenzug	183—184
„ doppelte Rollenzug	184
Flaschenzüge	185
Der gemeine Flaschenzug	185—186
Der Differential-Flaschenzug	186—187
Faktorenrollenzüge	187—188
Die glatte zylindrische Reibungstrommel	188—190
Seilreibungsrollen	190—191
Die Differentialwinde	192
Die Windentrommel	192—194
Hebelanordnungen	194—196
Die einfache Schraubenwinde	196—198
Krangestelle	198—212
Elevatoren (Becherwerke)	212—213
Förderschnecken	213—214
Fördergurte	214

Wasserräder.

Das überschlächtige Wasserrad	214—216
„ rückschlächtige „	216—219
„ mittelschlächtige „ mit Überfalleinlauf	219—221
„ „ „ Spannschütze	221—222
„ unterschlächtige „	222—223

Wasser-Turbinen.

Die Jonval-Turbine	224—226
„ Girard- „	226—229
„ Francis- „	229—232

Dampfkessel.

Wärmemenge zur Bildung von Wasserdampf	233
Heizwertbestimmung des Brennstoffes	233
Luftbedarf für Brennstoff	234
Restimmung der Rostfläche	234—235
Berechnung des Schornsteinquerschnittes	235
Konstruktion und Anlage der Dampfkessel (Tabelle)	236
Dampfkesseldetails	237
Der zylindrische Kesselmantel mit Nietung	237—239
Blechstärken von Flammrohren	240
Ebene Wände mit Stehbolzen	240
Ebene flache Böden ohne Verankerung	241
Gewölbte Böden	241
Randversteifungen für Mannlochausschnitte	241

TECHNISCHE BERECHNUNGEN.

Seite

Neue Bestimmungen über Berechnung von Kesseltheilen	241—244
Feine Armatur der Dampfkessel	244
Dampfabsperrentil	244
Sicherheitsventil	244
Speiseventil und Abblasehahn	245
Vorwärmer für Speisewasser	245
Economiser	245—246
Vorwärmer durch Abdampf geheizt	247
Überhitzer	247—248

Dampfmaschinen.

Tabellen über Dampfmaschinen	248—256
Einzylinder-Maschine	256
Zweizylinder-Maschine	258
Kondensator zur Dampfmaschine	259
Regulatoren	260
Der Wattsche Regulator	260
„ Porter- „	262
„ Proell- „	263
„ Kley- „	264
„ Feder- „ (System Trenck)	265
Schwungräder	267
Lokomotiven	268
Speisevorrichtungen für Dampfkessel	270

Pumpen.

Einfach wirkende Plungerpumpen	271
Doppelt „ „	271
Zentrifugal-Pumpen	272
Ventilatoren	273
Roots-Blower	275
Heberleitung	275

Holz- und Eisenkonstruktionen.

Ausleger	277
Hölzerne Dachkonstruktionen	281
Hänge- und Sprengwerke	285
Bockgestelle	289
Eiserne Dachbinder	290
Fachwerkträger	300
Parallelträger	300
„ mit Diagonalen	304
Der parabolische Träger	306
Parabelträger mit belastetem Obergurt	307—309
„ „ „ Untergurt	310—312
Eisenbahnbrücke	312
Eisenbetonbau	325—330
Mauergewölbe	331
Tragfähigkeit einer Sandschicht	332
Standfähigkeit von Mauern	333
„ „ Futtermauern	334
Erddruck	336
Statische Berechnung eines gemauerten Schornsteines	340
„ „ „ eisernen „	345

Tabellen-Anhang.

Tabelle der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge, Kreisinhalte und der natürlichen Logarithmen	348
Trigonometrische Tabelle	362
Bogenlängen, Sehnenlängen, Bogenhöhen, Verhältnis der Bogenhöhe zur Sehnenlänge und Inhalt der Kreisabschnitte für den Radius = 1	366

HOPPE, FRITZ, Wie stellt man Projekte, Kostenanschläge und Betriebskostenberechnungen für elektrische Licht- und Kraftanlagen auf? Aus der Praxis für die Praxis. 4. vervollständigte Auflage. [XV, 437 Seiten mit vielen Abbildungen und Tabellen.] 1907. Geb. M. 5.50.

Prakt. Masch.-Konstr.: In handlichem Format, das das Nachschlagen sehr erleichtert, präsentiert sich die vierte Auflage dieses für die Praxis geschriebenen Buches, das sich durch sein reiches Tabellen- und Zahlenmaterial, seine Berechnungs- und textlichen Angaben in wenigen Jahren die Wertschätzung aller projektierenden Elektrotechniker erworben hat.

Physikal. Zeitschrift: Das Büchlein enthält ungefähr alles an Preisen, Gewichten und technischen Zahlenwerten nebst zugehörigen Erläuterungen, was ein Praktiker beim Entwurf neuer Anlagen braucht. Daß es in wenigen Jahren 4 starke Auflagen erlebt, ist das sicherste Zeichen für seine Beliebtheit.

HOPPE, FRITZ, Sammlung elektrotechnischer Lehrhefte.

Die Hefte, von denen jedes ein in sich geschlossenes Ganzes bildet, sind einzeln verkäuflich. Jedes Heft wird 4–10 Druckbogen umfassen und gebunden ca. M. 2.50 bis M. 6.— kosten. Die mit Preis versehenen Hefte (*) sind bereits erschienen die übrigen folgen in kürzester Frist.

- *Heft 1: Grundgesetze der allgemeinen Elektrizitätslehre. (VI, 112 S. mit 118 Fig. 1908) . . . geb. M. 4.—
- *Heft 2: Grundgesetze der Wechselstromtheorie. (VI, 147 S. mit 160 Fig. 1908) . . . geb. M. 5.—
- *Heft 3: Prinzip und Wirkungsweise der technischen Meßinstrumente für Gleichstrom. (VI, 63 S. mit 81 Fig. 1908) . . . geb. M. 2.70.
- Heft 4: Prinzip und Wirkungsweise der technischen Meßinstrumente für Wechselstrom.
- Heft 5: Prinzip und Wirkungsweise der Wattmeter und Elektrizitätszähler für Gleich- und Wechselstrom.
- *Heft 6: Widerstandsmessungen m. Berücksichtigung der Isolationsmessungen, sowie der Widerstands- und Temperaturmessungen an Maschinen und Apparaten. (VI, 101 S. mit 120 Fig. 1908) . . . geb. M. 4.—
- Heft 7: Strom-, Spannungs- u. Leistungsmessungen, sowie Eichung von Instrumenten (unter der Presse).
- *Heft 8: Messungen an Maschinen und Motoren für Gleichstrom. (VI, 171 S. mit 214 Abb. 1909) . geb. M. 5.80.
- Heft 9: Messungen an Maschinen, Motoren und Apparaten für Ein- u. Mehrphasen-Wechselstrom.
- Heft 10: Übungsaufgaben zu Heft 1–9.

Naturwissenschaftl. Rundschau: Die Sammlung elektrotechnischer Lehrhefte verfolgt den Zweck, auf möglichst elementarer Grundlage einen Leitfaden für das Studium der Elektrotechnik zu bieten. Der Verf. hat in allen möglichen Anschaulichkeit und Leichtverständlichkeit erstrebt und dies durch Klarheit des Ausdrucks und Zuhilfenahme zahlreicher schematischer Zeichnungen zweifellos erreicht.

Die sorgfältig ausgearbeiteten Hefte werden nicht nur dem Anfänger im Studium der Elektrotechnik, an welchen sie sich in erster Linie wenden, sondern auch dem Lehrer und dem in der Praxis stehenden Elektrotechniker, denen sie vermöge der übersichtlichen Darstellung zur raschen Orientierung dienen können, von Nutzen sein.

HOPPE, FRITZ, Die Elektrizitätswerkbetriebe im Lichte der Statistik. Zweite, vollständig umgearbeitete und erweiterte Auflage des Buches: Was lehren die Statistiken der Elektrizitätswerke für das Projektieren und die Betriebsbuchführung von elektrischen Zentralen? Nach den neuesten Statistiken bearbeitet. [X, 321 S. Text, 120 graphische Darstellungen, 200 Tabellen.] 1908. M. 12.—, geb. M. 13.20.

Elektrotechn. Zeitschrift: Mit anerkennenswertem Fleiße hat der Verfasser des vorliegenden Buches sich an der Aufgabe versucht, die objektiven Daten der Statistik der Elektrizitätswerke und zwar sowohl derjenigen der Vereinigung der Elektrizitätswerke als auch der „ETZ“, kritisch zu sichten und diejenigen Schlüsse daraus zu ziehen, die für die Beurteilung bestehender, und für die Projektierung neuer Werke von Bedeutung sind.

Praktischer Maschinen-Konstrukteur: . . . Weit über eine Milliarde Mark sind allein in den öffentlichen Elektrizitätswerken Deutschlands investiert — Grund genug, ernstlich über ihre Rentabilität nachzusinnen. Das vorliegende Werk gibt manchen wertvollen Fingerzeig dazu und wird Ingenieuren wie Leitern von Elektrizitätswerken von unberechenbarem Nutzen sein.

Glaser's Annalen für Gewerbe und Bauwesen: Das sehr fleißige Werk stellt zum Teil in Tabellenform, zumeist in Kurvenform statistische Ergebnisse von Elektrizitätswerkbetrieben zusammen und verwertet hierzu die Statistiken der „Vereinigung der Elektrizitätswerke“, ferner der Elektrotechnischen Zeitschrift und von Dettmar.

Bücherzettel.

An die Buchhandlung

3 Pf.

RIGHI, A., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen. (Radioaktivität, Ionen, Elektronen.) Aus dem Italienischen übersetzt von B. Dessau, außerordentlichem Professor an der Universität Perugia. 2. Aufl. [VIII, 253 S. mit 21 Abb.] 1908. Geb. M. 4.80.

Elektrotechnische Zeitschrift: Die vorliegende Schrift erhebt keinen Anspruch, Neues zu bieten, sondern sie faßt das bis zu ihrem Erscheinen Bekannte in bewundernswerter Klarheit und in musterhafter Weise zusammen, so daß es dem Verfasser in der Tat gelungen ist, auf knappem Raum ein nahezu vollständiges Bild des Ursprunges, der Entwicklung und des gegenwärtigen Standes der Elektronentheorie zu entwerfen. Die Übersetzung läßt nichts zu wünschen übrig. Die Ausstattung des Buches, großer, außerordentlich deutlicher Druck auf ungewöhnlich starkem Papier, ist vortrefflich.

SNYDER, CARL, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft nach den Ergebnissen der neuesten Forschungen. Autorisierte deutsche Übersetzung von Prof. Dr. Hans Kleinpeter. 2. Aufl. [XII, 308 S. mit 16 Porträts.] 1907. M. 5.60, geb. M. 6.60.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht: . . . ein Buch, das über die Probleme, die die heutige Wissenschaft beschäftigen, die mannigfachste Belehrung bietet.

Gaea: Das Buch bietet eine ebenso interessante als belehrende Unterhaltung, und die deutsche Übersetzung ist vortrefflich.

Hierdurch bestelle ich:

1 Exempl. **GRAF, Technische Berechnungen.** Geb. M. 6.80

1 Exempl. **HOPPE,**

ferner:

(Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig)

Betrag ist nachzunehmen — folgt durch Postanweisung.

Ort und Name:

(Gefl. recht deutlich.)

IG.

nen
(n.)
au,
tät
b.]
80.

ehrt
zu
und
in
ges
gen
läßt
der,
rem

ur-
ten
ng
II,
60.

cht:
en-

be-
vor-